Crítica a la Enseñanza de la Medición del Campo Electromagnético en Algunos Libros Universitarios Famosos de Postgrado

Luis Gerardo Pedraza-Saavedra[1] y Luis Fernando Bejarano-Avendaño[2]

Resumen – En la enseñanza postgraduada del campo electromagnético y su medición se utilizan libros famosos como los de J. D. Jackson (Electrodinámica Clásica) y tres de los tomos de la famosa colección de física teórica de L. D. Landau, E. M. Lifshitz, V. B. Berestetskii, L. P. Pitaevskii y A. M. Kosevich (Mecánica Cuántica (Teoría No-Relativista), Teoría Cuántica Relativista y Física Estadística), que aún siguen publicándose con errores formales y conceptuales. Este artículo critica dichas fallas y también critica algunos malentendidos de Mensky y Von-Borzeszkowski-Mensky al respecto, cuando ellos usan el método de integrales restringidas de Feynman.

Palabras Clave – Macroscópico, Clásico, Microscópico, Cuántico, Medición clásica, Medición cuántica, Campos electromagnéticos.

Abstract – Postgraduate teaching of the electromagnetic field and its measurement uses famous books like of the J. D. Jackson (Classical Electrodynamics) and three of the volumes of the famous collection of theoretical physics of L. D. Landau, E. M. Lifshitz, V. B. Berestetskii, L. P. Pitaevskii and A. M. Kosevich (Quantum Mechanics Non-Relativistic Theory, Quantum Electrodynamics and Statistical Physics), which still continue publishing with formal and conceptual errors. This article criticizes such failures and some Mensky and Von-Borzeszkowski-Mensky's misunderstandings in this regard, when they use the method of restricted Feynman integrals.

Keywords – Macroscopic, Classical, Microscopic, Quantum, Classical measurement, Quantum measurement, Electromagnetic fields.

---

[1] Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia, lugepesa@javerianacali.edu.co
[2] Departamento de Física, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico, luis.bejarano@upr.edu

Note. The manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on February 2nd, 2013; accepted on June 10th, 2013. This paper is part of the Latin American and Caribbean Journal of Engineering Education, Vol. 7, No. 1, 2013. © LACCEI, ISSN 1935-0295.

INTRODUCCIÓN

En física es común hacer equivalente macroscópico con clásico y microscópico con cuántico, al describir fenómenos como el gas ideal, la radiación Hawking de un agujero negro, entre otros. Como un intento indirecto de establecer la diferencia, Landau-Peierls (1983) partieron de que en el terreno *clásico* se definen puntualmente los campos electromagnéticos y su mejor medición debe hacerse con cargas o corrientes de prueba *microscópicas cuánticas* y según Bohr-Rosenfeld (1983a), en el terreno *cuántico* tienen sentido físico sólo los campos electromagnéticos promediados espacio-temporalmente y su mejor medición debe hacerse con cargas o corrientes de prueba *macroscópicas cuánticas*. Uno de los autores del presente artículo (Pedraza: 2000, 2003, 2004a, 2004b, 2006, 2007, 2008) ha revisado y completado con nuevos cálculos y experimentos de pensamiento, compatibles con los límites de medición cuánticos impuestos por las relaciones de indeterminación del formalismo, todos los casos que quedaron pendientes por estudiar en los trabajos anteriores, concluyéndose finalmente que los conceptos de clásico y macroscópico y, cuántico y microscópico son diferentes no sólo en los ejemplos estudiados por los anteriores autores, sino en todos los posibles casos de medición de los campos electromagnéticos. En el presente artículo se critican algunas ideas que siguen publicándose en las últimas ediciones de libros de texto de electrodinámica clásica como el de Jackson (1975, 1998), y en las últimas versiones de tres de los tomos de la famosa colección de física teórica de Landau-Lifshitz-Berestetskii-Pitaevskii-Kosevich (1975, 1983, 2005, 2008). También se critican algunos malentendidos de Mensky (1993) y Von-Borzeszkowski-Mensky (1994) al estudiar el anterior problema de medición usando el método de integrales restringidas de Feynman. Más específicamente, el presente artículo se divide en ocho secciones. En la primera se hacen observaciones críticas sobre la definición clásica y la medición clásica de los campos electrostático y magnetostático, concluyéndose que dichos campos se pueden medir con precisión absoluta. En la segunda se siguen algunos resultados de Talbot (1978) para reconstruir las diferentes etapas del raciocinio de Landau-Peierls (1983) en su aparente demostración de la imposibilidad de medir el campo electromagnético cuántico libre, donde usaron la energía radiada por una partícula cargada de prueba y la relación de indeterminación energía-tiempo para obtener una limitación inherente en la medibilidad del momento lineal de dicha partícula cargada. En la tercera se critican algunas ideas de Landau-Lifshitz (1975, 1983) sobre el carácter irreversible de todo proceso de medición y el papel que juega la relación de indeterminación energía-tiempo en ese proceso. En la cuarta se critican otras ideas de Landau-Peierls (1983) y de Berestetskii-Lifshitz–Pitaevskii (1975), también sobre la limitación inherente en la medibilidad del momento lineal de una partícula cargada de prueba. En la quinta se reconstruye de dos maneras el análisis de Landau-Peierls (1983) sobre la aparente imposibilidad de medir el campo electromagnético cuántico libre. En la sexta se detallan las diferentes sutilezas que Bohr-Rosenfeld (1983a) tuvieron que concebir para dar respuesta a las problemáticas ideas y conclusiones de Landau-Peierls (1983) expuestas en la quinta sección, pero sólo para componentes eléctricas. En la séptima se usan los resultados de uno de los autores de este artículo (Pedraza, 2004a, 2006, 2007), siguiendo el estilo de lo expuesto en la sexta sección, para mostrar las diferentes sutilezas que Bohr-Rosenfeld deberían haber concebido al dar respuesta a las problemáticas ideas y conclusiones de Landau-Peierls (1983) expuestas en la quinta sección, pero para las componentes magnéticas. Por último, en la octava sección se reconstruyen en detalle los análisis de Mensky (1993) y Von-Borzeszkowski-Mensky (1994) sobre la medición del campo electromagnético cuántico libre usando integrales restringidas de Feynman, pero criticándoles, a partir de sus resultados, la reiterada confusión entre los resultados de medición de Landau-Peierls (1983) y Bohr-Rosenfeld (1983a), tanto en los casos estudiados por estos últimos, como en los no estudiados por ellos. También se les critica el no considerar para nada de modo explícito un aparato de medición, por lo cual no hay manera ni de compensar su efecto ni de darse cuenta de la necesidad de esa compensación. Ellos tuvieron en cuenta la estructura discreta de la carga de la materia, lo cual parece no ser posible de hacer en la aproximación de integrales restringidas de Feynman. No tuvieron en cuenta la estructura del cuerpo de prueba, el cual desde un comienzo lo pensaron como microscópico.

1. ANÁLISIS CRÍTICO DE PEDRAZA-BEJARANO A JACKSON

1.1 Campo electrostático clásico

Puede escribirse en unidades CGS (Jackson (1975)) la fuerza electrostática entre dos cargas eléctricas puntuales *q* y *q'*, situadas respectivamente en los vectores posición $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ como

$$\vec{F}(\vec{r}) = qq'(\vec{r}-\vec{r}\,')\Big/\left|\ \vec{r}-\vec{r}\,'\ \right|^3 = q\vec{E}(\vec{r})\,, \qquad (1)$$

donde $\vec{E}(\vec{r})$ es el campo electrostático de *q'* en $\vec{r}$. Existen generalizaciones de la fórmula (1) para el campo electrostático producido por varias cargas puntuales, distribuciones lineales de carga, distribuciones superficiales de carga y distribuciones volumétricas de carga, que no interesan por ahora. Vale la pena entonces hacer las siguientes observaciones sobre la fórmula (1):

a) Para que la carga *q*, con la cual se mide el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ producido por *q'*, no perturbe con su propio campo el campo anterior, se asume la definición

$$\underset{q\to 0}{límite}\ \vec{F}(\vec{r})/q = \vec{E}(\vec{r})\,. \quad (2)$$

b) El límite $q \to 0$ no puede darse físicamente, puesto que la carga eléctrica mínima es la del electrón (o protón), con valor $q_{mínima} = e \cong 4{,}80x10^{-10}\,ues$, donde ues significa unidades electrostáticas.

c) Las cargas *q* y *q'* pueden ser microscópicas pero no pueden físicamente ser puntuales, puesto que el radio del electrón es aproximadamente $R_e = e^2\big/mc^2 \cong 2{,}82x10^{-13}\,cm$, siendo *m* la masa del electrón y *c* la rapidez de la luz en el vacío (Heitler (1984)).

d) La magnitud de la resta vectorial $\vec{r}-\vec{r}\,'$ no puede matemáticamente ser cero, y tampoco físicamente puede ser menor que $2\,R_e$.

e) Las cargas eléctricas *q* y *q'* se suponen con posiciones y velocidades definidas. Es decir, a pesar de que pueden ser microscópicas, ellas no están sometidas a las relaciones de indeterminación de Heisenberg $\Delta(Mv)\Delta r \geq (\hbar/2)$ y $\Delta(M'v')\Delta r' \geq (\hbar/2)$, por lo que su descripción es clásica. Las masas de *q* y *q'* son *M* y *M'*, como también *v* y *v'* son respectivamente sus rapideces.

1.2 Campo magnetostático clásico

Puede escribirse en unidades Gaussianas (Jackson (1975)) la fuerza magnética que una carga eléctrica microscópica *q* con velocidad $\vec{v}$ experimenta por efecto del campo magnetostático $\vec{H}(\vec{r})$ como

$$\vec{F}(\vec{r}) = (q/c)\vec{v}\ x\ \vec{H}(\vec{r})\,, \qquad (3)$$

donde $\vec{H}(\vec{r})$ es producido por otras cargas eléctricas microscópicas en movimiento, corrientes *I* en alambres y densidades de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ superficiales o volumétricas. Vale la pena entonces hacer las siguientes observaciones sobre la fórmula (3):

a) Para que la carga *q*, con la cual se mide el campo magnetostático $\vec{H}(\vec{r})$ producido por otras cargas en movimiento, no perturbe con su propio campo el campo anterior, se asume la definición

$$\underset{q\to 0}{límite}\ \vec{F}(\vec{r})/q = \vec{v}\ x\ \vec{H}(\vec{r})/c\,. \quad (4)$$

b) El límite $q \to 0$ no puede darse físicamente, puesto que la carga eléctrica mínima es la del electrón (o protón), con valor $q_{mínima} = e \cong 4{,}80x10^{-10}\,ues$.

c) La carga *q* puede ser microscópica pero no puede físicamente ser puntual, puesto que el radio del electrón es aproximadamente $R_e = e^2\big/mc^2 \cong 2{,}82x10^{-13}\,cm$ (Heitler (1984)).

d) La magnitud de la resta vectorial $\vec{r}-\vec{r}\,'$ que aparece en cualquier expresión posible de $\vec{H}(\vec{r})$, por ejemplo

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_{L'} Id\vec{l}\,'\ \ x\ \ (\vec{r}-\vec{r}\,')\big/c\left|\ \vec{r}-\vec{r}\,'\ \right|^3,$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_{A'} \vec{J}(\vec{r}\,')\ \ da'\ \ x\ \ (\vec{r}-\vec{r}\,')\big/c\left|\ \vec{r}-\vec{r}\,'\ \right|^3, \text{ o}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}\,')\ \ dv'\ \ x\ \ (\vec{r}-\vec{r}\,')\big/c\left|\ \vec{r}-\vec{r}\,'\ \right|^3\,, \qquad (5)$$

no puede matemáticamente ser cero, y tampoco físicamente puede ser menor que $2\,R_e$.

e) La carga eléctrica *q* y las que producen $\vec{H}(\vec{r})$ se mueven con rapideces no relativistas, menores que la de la luz en el vacío. Se asume también que las cargas no tienen aceleración, es decir, sus velocidades son constantes.

f) La carga *q* tiene rapidez y posición siempre completamente conocidas. O sea, a pesar de que puede ser microscópica, ella no está sometida a la relación de indeterminación de Heisenberg $\Delta(Mv)\Delta r \geq (\hbar/2)$, por lo que su descripción es clásica.

1.3 Medición clásica del campo electrostático clásico

Tomando el caso más simple ($\vec{r}\,'=0$) en la fórmula (2), como caso de estudio de la medición clásica del campo electrostático, se tiene que

$$qq'(\vec{r})/\left|\ \vec{r}\ \right|^3 = q\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) = d\vec{p}/dt \cong \Delta\vec{p}/\Delta t = M(\vec{v}^{\,f} - \vec{v}^{\,i})/(t^f - t^i), \qquad (6)$$

por lo tanto

$$\left|\vec{E}(\vec{r})\right| \cong \left|\Delta\vec{p}\right|/q\Delta t\,. \qquad (7)$$

Entonces la indeterminación de la magnitud del campo electrostático clásico es aproximadamente (Rodríguez (2009))

$$\Delta\left|\vec{E}(\vec{r})\right| \cong \left[\Delta q/q + \Delta(\Delta t)/\Delta t + \Delta\left|\Delta\vec{p}\right|/\left|\Delta\vec{p}\right|\right]\ \left|\vec{E}(\vec{r})\right|, \qquad (8)$$

donde, cuando aparecen dos deltas en frente de alguna cantidad, la primera de izquierda a derecha significa la indeterminación de la variación de dicha cantidad y la segunda, la variación de la cantidad.
Se ve claramente que, al no cumplir la carga de prueba q la relación de indeterminación de Heisenberg $\Delta(Mv)\Delta r \geq (\hbar/2)$ y, como es posible clásicamente que las indeterminaciones de q y Δt sean tan pequeñas como se desee, se concluye que en principio el campo electrostático clásico medido con cargas de prueba clásicas microscópicas tiene indeterminación

$$\Delta\left|\vec{E}(\vec{r})\right| \cong 0\,. \qquad (9)$$

1.4 Medición clásica del campo magnetostático clásico

Similarmente, con ayuda de la fórmula (4), como caso de estudio de la medición clásica del campo magnetostático, se tiene que

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{v}\ x\ \vec{H}(\vec{r})/c$$
$$= d\vec{p}/dt \cong \Delta\vec{p}/\Delta t = M(\vec{v}^{\,f} - \vec{v}^{\,i})/(t^f - t^i), \qquad (10)$$

por lo tanto

$$\left|\Delta\vec{p}\right|/\Delta t \cong (q/c)\ \left|\vec{v}\right|\ \left|\vec{H}(\vec{r})\right|\ \left|\ sen\theta\ \right|, \quad (11)$$

siendo θ el menor ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{H}(\vec{r})$, de donde (Rodríguez (2009))

$$\Delta\left|\vec{H}(\vec{r})\right| \cong \left[\Delta c/c + \Delta\left|\vec{v}\right|/\left|\vec{v}\right| + \Delta q/q + \Delta(\left|\ sen\theta\ \right|)/\left|\ sen\theta\ \right| + \Delta(\Delta t)/\Delta t + \Delta\left|\Delta\vec{p}\right|/\left|\Delta\vec{p}\right|\right]\ \left|\vec{H}(\vec{r})\right|. \quad (12)$$

Se ve claramente que, al no cumplir la carga de prueba q la relación de indeterminación de Heisenberg $\Delta(Mv)\Delta r \geq (\hbar/2)$ y, como es posible clásicamente que las indeterminaciones de c, $\left|\vec{v}\right|$, q, $\left|\ sen\theta\ \right|$ y Δt sean tan pequeñas como se desee, se concluye que en principio el campo magnetostático clásico medido con cargas de prueba clásicas microscópicas tiene indeterminación

$$\Delta\left|\vec{H}(\vec{r})\right| \cong 0\,. \qquad (13)$$

2. ANÁLISIS CRÍTICO DE TALBOT A LANDAU-PEIERLS

2.1 Crítica de Talbot a la teoría cuántica de la medición de Landau-Peierls

El trabajo de Landau-Peierls (1983) demostró aparentemente que no era posible medir el campo electromagnético cuántico libre. La teoría de la medición que ellos usaron es problemática desde los puntos de vista filosófico, matemático y físico. La usaron con la relación de indeterminación energía–tiempo, a partir de la cual obtuvieron una limitación en la medibilidad del momento lineal de una partícula cargada. Esta indeterminación, más la consideración de la energía radiada por la carga acelerada, guía a una indeterminación mínima en la magnitud de alguna componente del campo electromagnético cuántico libre.
Aquí se hará una división de las diferentes etapas del raciocinio de Landau–Peierls y se verá cómo sus argumentos se propagaron entre algunos de los estudiantes y colegas de ellos, a través de tres de los tomos de la famosa colección de física teórica de la

autoría de Landau con Lifshitz, Berestetskii, Pitaevskii y Kosevich. En este propósito se utilizarán en lo que sigue algunos resultados de Talbot (1978) al respecto.

2.2 Repetibilidad y predictibilidad

Según Landau–Peierls (1983) la condición de repetibilidad es rechazada para mediciones en el dominio cuántico. Una medición es repetible, ideal o de primera clase (d'Espagnat (1995)), si una repetición de la medición inmediatamente después da, con aproximación arbitraria, el mismo resultado. Así, el sistema es dejado por una medición repetible en el estado que es registrado por el resultado de medición, es decir, un estado propio del observable siendo medido.

Para Landau–Peierls una medición deja el sistema en un estado diferente del estado registrado por la medición, y no necesariamente perteneciente al observable siendo medido. Ahora bien, una medición es predecible para Landau–Peierls si, para todo posible resultado de aquella medición, hay un estado del sistema en el cual la misma clase de medición da aquel resultado con probabilidad uno. Por resultado posible Landau–Peierls entienden el valor posible del observable del aparato. Ellos creyeron demostrar que la correspondencia entre los estados finales del sistema y los estados clásicos del aparato implica la predictibilidad, razonando de la siguiente manera: los posibles estados del sistema *S* y el aparato *A* están representados por vectores pertenecientes a los espacios de Hilbert del sistema y el aparato, respectivamente. El estado de la composición *S* + *A* se representa por un vector del producto tensorial entre estos dos espacios de Hilbert. Puesto que cualquier vector puede expandirse en términos de un conjunto ortogonal completo de vectores, y los vectores que representan estados correspondientes a los valores posibles de cualquier observable forman un conjunto ortogonal completo, el estado final de *S* + *A* después de la interacción (medición) puede expandirse siempre como una serie de vectores que representan estados del aparato en los cuales sus observables tienen valores definidos multiplicados por coeficientes adecuados. Como estos coeficientes corresponden a vectores del espacio de Hilbert de *S*, la condición de correspondencia para la medición será satisfecha.

Para Landau–Peierls el estado inicial de *S* + *A* es representable por el producto tensorial $\psi \otimes \varphi_0$, donde ψ es un vector arbitrario en el espacio de Hilbert de *S* y φ_0 es un vector en el espacio de Hilbert de *A* representando un estado en el cual el aparato tiene un valor neutral definido, por ejemplo, la lectura de un cero en una escala.

Ellos escribieron el estado final de *S* + *A* después de la interacción (medición) como una expansión en términos de los vectores del aparato φ_i, representando estados en los cuales los observables del aparato tienen valores definidos y cuyos coeficientes ψ_i son vectores de estado pertenecientes al espacio de Hilbert de *S*, representando entonces estados de $S : \sum_i \psi_i \varphi_i$. Los ψ_i no constituyen necesariamente un conjunto ortogonal completo de vectores correspondientes a valores definidos de alguna cantidad física asociada con el sistema. El sentido en el cual una medición es la medición de alguna cantidad física perteneciente al sistema, es provisto para Landau–Peierls por la siguiente "demostración" de la condición de predictibilidad.

Ellos notaron que cada ψ_n puede escribirse como $\psi_n = a_n u_n$, donde los u_n están normalizados a la unidad y para *n* arbitrario no forman necesariamente un conjunto ortogonal completo de vectores. Los a_n son escalares complejos. Ellos clamaron también que la linealidad del operador evolución unitario implica que $a_n = \int \psi\, v_n^* d\tau$ ($d\tau$ = elemento de volumen), para algún vector de estado v_n perteneciente al espacio de Hilbert de *S*.

Ahora bien, ellos afirmaron que $|a_n|^2$ es la probabilidad de que *S* + *A* sea encontrado en el estado $u_n \otimes \varphi_n$, es decir, que el aparato se halle en el estado φ_n después de la medición.

Se puede escribir $\sum_i a_i a_i^* = \int \sum_i a_i v_i \psi^* d\tau$ por simple sustitución. El deseo de Landau–Peierls fue mostrar que los v_i formaban un sistema ortogonal completo de vectores, o sea, $\psi = \sum_i a_i v_i$. Ellos solamente demostraron que

$1=\sum_i |a_i|^2 = \sum_i a_i a_i^* = \int \sum_i a_i v_i \psi^* d\tau,$ puesto que $|a_n|^2$ es una probabilidad relativa, y concluyeron sin justificación que $\sum_i a_i v_i = \psi$ basándose en el hecho de que el producto escalar de ψ y $\sum_i a_i v_i$, es decir, $\int \sum_i a_i v_i \psi^* d\tau$, es 1. Como lo anota Talbot (1978), que el producto escalar de dos vectores sea 1 no implica que ellos sean idénticos, a menos que ellos sean unitarios desde el comienzo. Aunque se sabe que ψ es un vector unitario, $\sum_i a_i v_i$ no lo es.

Del hecho de que $\sum_i |a_i|^2 = 1$ y que cada v_i es un vector unitario, no se obtiene que $\sum_i a_i v_i$ sea un vector unitario, a menos que los v_i sean ortogonales, que es precisamente el punto que Landau–Peierls se propusieron demostrar. Ellos no asumieron que el operador evolución U que gobierna la interacción en la medición hiciera $U(u_n \otimes \varphi_0) = u_n \otimes \varphi_n$, lo cual sería un ejemplo de repetibilidad, rechazada por ellos. Su falla estuvo al deducir que había un estado v_n de S tal que $U(v_n \otimes \varphi_0) = u_n \otimes \varphi_n$, y el conjunto de los v_n era completo y ortogonal.

El defecto básico en el razonamiento de Landau–Peierls es la suposición de que a todo estado final $u_n \otimes \varphi_n$ corresponde un estado inicial $v_n \otimes \varphi_0$, donde v_n es cualquier vector de estado del espacio de Hilbert de *S*, pero φ_0 es el estado neutral fijo del aparato. La unitariedad del operador evolución asegura la existencia de un vector ϕ del producto tensorial de los espacios de Hilbert de *A* y *S* tal que $U(\phi) = u_n \otimes \varphi_n$, pero no implica que ϕ sea expresable en un producto $\chi \otimes \xi$, donde χ es un vector del espacio de Hilbert de *S* y ξ es algún múltiplo escalar de φ_0. Es decir, si se considera al estado final $\sum_n a_n u_n \varphi_n$ como la salida de un operador evolución U actuando sobre $\psi\varphi_0$, entonces la linealidad del operador implica que $\sum_n a_n U(\sigma_n) = \sum_n a_n u_n \varphi_n$, tal que $U(\sigma_n) = u_n \varphi_n$. La unitariedad del operador implica entonces que a_n es igual al producto escalar $\left(\sigma_n, \sum_n a_n u_n \varphi_n\right)$. Ellos quisieron demostrar la existencia de un conjunto completo de vectores v_n, tal que $a_n = (v_n, \psi_n)$ y $\psi = \sum_n a_n v_n$. Tal demostración requeriría, sin embargo, que $\sigma_n = v_n \varphi_0$, lo cual en general no es el caso.

Si los v_n constituyeran un conjunto ortogonal completo, ellos podrían asociarse con algún operador lineal representando alguna cantidad física pertinente al sistema. La medición podría entonces considerarse como una medición de dicha cantidad física, aún cuando inmediatamente después de la medición el sistema podría no estar en cualquiera de los estados v_n.

2.3 Relación de indeterminación energía-tiempo

En cuanto a la interpretación de la relación $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ dentro del contexto de la teoría de la medición propuesta por Landau–Peierls, ellos mismos dicen textualmente (1983): "debemos tener en cuenta el cambio causado por el proceso de medición aún en el caso de mediciones predecibles, es decir, de la diferencia entre el resultado de la medición (v_n) y el estado después de la medición (u_n). La relación entonces significa que esta diferencia causa una indeterminación en la energía del orden $\frac{\hbar}{\Delta t}$, tal que en el tiempo Δt no puede realizarse una medición para la cual la indeterminación en la energía en ambos estados es menor que $\frac{\hbar}{\Delta t}$".

Ya que la indeterminación en la energía podría ser entonces arbitrariamente pequeña en el estado v_n o en el u_n, Landau–Peierls concluyeron que la relación de indeterminación energía–tiempo no impone limitación en la medición de la energía del sistema en un instante dado, contradiciendo a Heisenberg (1983), el propio descubridor de la relación.

El problema más serio en el tratamiento de Landau–Peierls sobre la relación de indeterminación energía–tiempo y sus implicaciones es su inferencia de la desigualdad $\Delta(E - E') \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$ para la indeterminación de la energía de interacción bajo la suposición de que las energías $\in$ y $\in'$ del aparato antes y después de la medición son precisamente conocidas. Si $\in$ y $\in'$ son precisamente conocidas, no puede contarse la cantidad de indeterminación en la energía de interacción expresada por la resta $E - E'$, siendo indeterminada, puesto que $E \; y \; E'$ son las energías del sistema antes y después de su interacción con el aparato y no durante la interacción.

Infortunadamente Landau–Peierls utilizaron la última desigualdad en su derivación de la no-repetibilidad de las mediciones del momento lineal.

Tales mediciones requieren la aplicación de la conservación del momento lineal y de la energía (dentro de la precisión $\frac{\hbar}{\Delta t}$, donde Δt es el tiempo entre las mediciones del momento lineal y la energía) para la colisión entre un cuerpo de prueba (instrumento que puede ser una partícula o un fotón) antes y después de su interacción con el sistema (objetivo o blanco).

A partir de las ecuaciones

$$\vec{p} + \vec{P} - \vec{p}' - \vec{P}' = 0,$$
$$\left| E + \in - E' - \in' \right| \geq \frac{\hbar}{\Delta t}, \qquad (14)$$

y de la suposición de que las cantidades $\vec{p}, \; \vec{p}', \in \; y \in'$ pertinentes al aparato (cuerpo de prueba), son conocidas exactamente, concluyen que $\Delta\vec{P} = \Delta\vec{P}'$.

Utilizando la identidad

$$\Delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)\Delta P = \left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{P^2}{2M}\right)\right)\Delta P = v\Delta P$$

infirieron la relación

$$(v - v')\Delta P \geq \frac{\hbar}{\Delta t}, \quad (15)$$

donde v y v' son las rapideces inicial y final del sistema, respectivamente. Ellos concluyeron: “así cualquier medición del momento lineal involucra necesariamente un cambio definido del momento lineal (en adición al cambio desconocido que restringe la precisión en la medición)”.

Ahora bien, $(v - v')\Delta P = v\Delta P - v'\Delta P = \Delta E - \Delta E'$, pero esta última resta no iguala en general a $\Delta(E - E')$. Es ciertamente desconcertante que Landau–Peierls caractericen la relación $(v - v')\Delta P \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$ como una consecuencia de la relación $\Delta(E - E') \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$, a la vez que el origen teórico de esta última es también un misterio.

3. ANÁLISIS CRÍTICO DE PEDRAZA-BEJARANO A LANDAU-LIFSHITZ

En el tercer tomo (Landau-Lifshitz (1983)) de la famosa colección de física teórica, Landau–Lifshitz asumen de nuevo las argumentaciones criticadas en las secciones anteriores, propagando entonces sus problemáticas ideas a sus alumnos y colegas y posiblemente a sus potenciales lectores.

Ellos distinguieron textualmente en el proceso de medición en física cuántica dos caras: “su papel respecto del pasado y el futuro no coinciden. Con relación al pasado dicho proceso “verifica” las probabilidades de los diferentes resultados posibles predichos por el estado resultante de la medición anterior. En cambio, en relación al futuro, da lugar a un nuevo estado. En la propia naturaleza del proceso de medición se encierra así una profunda irreversibilidad. Esta irreversibilidad tiene un importante significado fundamental. Como veremos más adelante, las ecuaciones básicas de la mecánica cuántica poseen de suyo un carácter simétrico con relación al cambio de signo de la variable tiempo; en este respecto la mecánica cuántica no difiere de la clásica. La irreversibilidad del proceso de medición, en cambio, introduce en los fenómenos cuánticos una no-equivalencia física de los dos sentidos del tiempo, es decir, conduce a la aparición de una diferencia entre futuro y pasado”.

Una exposición totalmente equivalente a la acabada de nombrar la hacen también Landau-Lifshitz en el quinto tomo de la colección de física teórica de su producción (Landau-Lifshitz (1975)) pero en términos del aumento de entropía durante el proceso de medición. Ellos dijeron: “como es sabido, la ecuación fundamental de la mecánica cuántica -la ecuación de Schrödinger- es de suyo simétrica con

relación al cambio de signo del tiempo (con la condición de cambiar a la vez la función de onda ψ por la ψ^*). Esto significa que si en cierto instante $t = t_1$ se da la función de onda $\psi = \psi(t_1)$, y si de acuerdo con la condición de Schrödinger, en otro instante $t = t_2$ debe pasar a ser igual a $\psi(t_2)$, la transición de $\psi(t_1)$ a $\psi(t_2)$ es reversible; con otras palabras, si en el instante inicial $t = t_1$ fuera $\psi = \psi^*(t_2)$, en el instante $t = t_2$ será $\psi = \psi^*(t_1)$. Sin embargo, a pesar de esta simetría, la mecánica cuántica contiene en realidad de manera esencial la no-equivalencia de los dos sentidos del tiempo. Esta no-equivalencia resulta del proceso, fundamental para la mecánica cuántica, de la interacción del objeto cuántico con un sistema que obedece con un grado de precisión suficiente a la mecánica clásica. En efecto, si ocurren sucesivamente dos procesos de interacción con el objeto cuántico dado (los llamaremos A y B), es posible afirmar con sentido que la probabilidad de un resultado cualquiera del proceso B se determina por el resultado del proceso A tan sólo en el caso en que el proceso A tuvo lugar antes que el proceso B.
Así, pues, en la mecánica cuántica se tiene una no-equivalencia física entre ambos sentidos del tiempo y, posiblemente, la expresión “macroscópica” de este hecho es precisamente la ley de crecimiento de la entropía”.
Debe aclararse que la irreversibilidad asociada con una medición no es peculiar a la física cuántica. Medir es interactuar o percibir, luego debe dejar un efecto irreversible o en los sentidos de un ser con mente o en un instrumento (clásico) como un computador, una cámara fotográfica, etcétera. La irreversibilidad está asociada inclusive con mediciones clásicas.
En el tercer tomo Landau–Lifshitz llegaron a partir de las ecuaciones (14) a la relación $\Delta E - \Delta E' \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$ en vez de llegar a $\Delta(E - E') \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$, pero utilizando otra vez la identidad $\Delta E = v\Delta P$, obtuvieron la ecuación (15), la cual interpretaron así: “esta relación pone de manifiesto que la medición del impulso de un electrón (con una precisión dada ΔP) está inevitablemente ligada con una variación de su velocidad (es decir, con una variación del propio impulso). Este cambio es tanto mayor cuanta más corta es la duración del propio proceso de medición. Se puede conseguir que la variación de la velocidad sea tan pequeña cuanto se quiera solamente si se hace $\Delta t \to \infty$, pero las mediciones del impulso que se prolongan durante un tiempo grande sólo pueden tener sentido para una partícula libre. Se manifiesta aquí de manera particularmente clara la no-reproducibilidad de la medición del impulso al cabo de cortos intervalos de tiempo y la “doble faz” que ofrece la medición en mecánica cuántica: la necesidad de distinguir entre el valor medido de la magnitud y el valor que surge como resultado del proceso de medición”.
Estos dos valores corresponden presumiblemente al estado propio v_n y al estado final u_n del sistema discutido por Landau–Peierls. En el caso de la medición de momento lineal, el estado propio v_n corresponde al valor definido del momento lineal que se dice es el resultado de la medición, y u_n es el estado propio de momento lineal correspondiente al momento lineal definido que se imparte al sistema por su interacción con el aparato.
Por último, Landau–Lifshitz (1975) concluyeron en el quinto tomo, utilizando otra vez la relación $\Delta E - \Delta E' \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$, y su particular interpretación de ella, que un cuerpo macroscópico no puede encontrarse en un estado estacionario. Más aún, dijeron: “de una manera general, la descripción del estado de un cuerpo macroscópico mediante una función de onda es irrealizable, ya que el número efectivamente posible de datos de que se dispone acerca del estado de dicho cuerpo no corresponde ni de lejos al número total de datos necesarios para construir su función de onda”.
La supuesta conclusión anterior deducida de una hipótesis dudosa, estaría en contradicción con la existencia de fenómenos como la superfluidez y la superconductividad que se presentan en los llamados sistemas macroscópicos cuánticos. También habría contradicción con la interpretación del principio de indeterminación de Heisenberg, el cual exige que un sistema macroscópico interactuando en circunstancias en que $\hbar$ no se pueda considerar despreciable, debe tratarse como cuántico. La frontera entre clásico y cuántico no coincide, en efecto, con aquella entre lo macroscópico y lo microscópico, ya que el criterio de cuanticidad es

que la variable acción típica en juego del sistema en su interacción sea del orden de $\hbar$. Esta observación merece un estudio posterior que no se hará en este trabajo.

4. ANÁLISIS CRÍTICO DE PEDRAZA-BEJARANO A LANDAU-PEIERLS-LIFSHITZ-BERESTETSKII-PITAEVSKII

En el terreno no-relativista la diferencia $v - v'$ de rapideces que aparece en la ecuación (15) puede ser arbitrariamente grande, lo cual implica que aún en cortos intervalos de tiempo, el momento lineal de un sistema puede medirse con precisión arbitraria. Ya en el rango relativista, máximo podría tenerse $v - v' = c$ (más precisamente $2c$), luego, una simple sustitución da la desigualdad

$$\Delta P \Delta t \geq \frac{\hbar}{c}, \quad (16)$$

a partir de la cual Landau–Peierls (1983) concluyeron: "con base en (16) el concepto de momento lineal tiene un significado preciso sólo sobre tiempos largos. Así, los casos donde el momento lineal cambie apreciablemente dentro de tales tiempos, el uso del concepto de momento lineal no tiene propósito". Esta conclusión la mantuvieron Berestetskii-Lifshitz–Pitaevskii (1975) en el cuarto tomo de la colección de física teórica en mención.

Cabe decir también que a pesar de criticar en los métodos a Landau–Peierls (1983), algunos autores (Mandelstamm-Tamm (1945), Krylov-Fock (1947)), han llegado a conclusiones similares a las de ellos en la interpretación de la relación energía–tiempo, la cual a diferencia de otras relaciones de indeterminación, no surge de una relación de conmutación entre un par de operadores donde uno de ellos represente la energía y el otro el tiempo. Así, Aharonov–Bohm (1961), con el propósito de criticar y refutar a Landau–Peierls, Mandelstamm-Tamm y Krylov–Fock, crearon su propia interpretación de la relación de indeterminación energía-tiempo y la usaron para construir su propia teoría de la medición, pero sus resultados no se abordarán en este artículo.

Cabe señalar que según Bohr (1987) la relación de indeterminación $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ determina: "la más alta precisión posible en la definición de la energía... de los individuos asociados con el campo ondulatorio", es decir, representados por el paquete de ondas. En particular, la energía de un sistema representado por el paquete de ondas será incierta, a diferencia de la opinión de Landau–Peierls, por una cantidad ΔE durante el intervalo temporal Δt.

La relación $\Delta P \Delta t \geq \frac{\hbar}{c}$ guarda una notable similitud con la relación $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, la cual según Landau–Peierls no impone limitación alguna en la medibilidad de la energía de un sistema en cualquier instante. Siguiéndolos a ellos mismos, podría decirse que no hay limitación alguna en la medibilidad del momento lineal de un sistema en cualquier instante, concluyéndose entonces que la propia argumentación de Landau–Peierls conlleva a dos interpretaciones opuestas de la misma relación de indeterminación, lo cual es contradictorio.

5. APARENTE IMPOSIBILIDAD DE MEDIR EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO CUÁNTICO LIBRE

5.1 Análisis de Landau-Peierls

De alguna manera Landau–Peierls supusieron que el formalismo del campo electromagnético cuántico estaba ligado con las ideas acerca de la constitución atómica de la materia. Vieron la necesidad de usar cargas microscópicas para medir las componentes del anterior campo. Este se describe en términos de las componentes en cada punto del espacio–tiempo, por tanto debe ser medible por medio de cargas microscópicas como el electrón o el protón. Una de estas cargas se coloca en la región donde existe el campo por medir y se le miden sus momentos lineales al comienzo y al final de cierto intervalo temporal de medición. La carga acelerada por la acción del campo emitirá radiación de reacción cuya energía por unidad de tiempo $\frac{dE}{dt}$, suponiendo que la carga tiene bajas velocidades en comparación con aquella de la luz, estará dada clásicamente por la fórmula siguiente (Heitler (1984))

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2, \quad (17)$$

siendo q la carga y $\vec{v}$ su vector velocidad.

La energía radiada $E \approx \frac{q^2}{c^3}\int_t^{t'} \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2 dt$ entre los instantes inicial t y final t' será mínima para una

aceleración uniforme $\frac{dv}{dt}=\frac{(v'-v)}{\Delta t}$ según Landau–Peierls, tal que la energía radiada será del orden $E\approx\frac{e^2}{c^3}\frac{(v'-v)^2}{\Delta t}$, donde de nuevo Δt es la duración de la medición del momento lineal y q se ha hecho igual a e.
Esta última cantidad para ellos es una cantidad de energía perdida no conocida que debe tenerse en cuenta en el balance energético de interacción, además de la indeterminación en la energía de interacción ya discutida.
Para ellos debe darse entonces que $(v'-v)\Delta P>\frac{e^2}{c^3}\frac{(v'-v)^2}{\Delta t}$, o lo que es lo mismo

$$\Delta P\Delta t>\frac{e^2}{c^3}(v'-v). \quad (18)$$

Multiplicando entre sí las ecuaciones (15) y (18) se obtiene que $(\Delta P\Delta t)^2>-\frac{\hbar e^2}{c^3}=-\frac{\hbar^2}{c^2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)$, tal que en valor absoluto

$$\Delta P\Delta t>\frac{\hbar}{c}\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}=\alpha\frac{\hbar}{c}, \quad (19)$$

con $\alpha=\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}$ siendo la constante de estructura fina.
Puede criticarse a Landau–Peierls observando que la integral que proporciona la energía radiada E es indeterminada debido a que el tiempo de colisión no se conoce, es decir, $\frac{d\vec{v}}{dt}$ no se conoce como función del tiempo. La deducción de la fórmula (19) se vuelve entonces dudosa.
Posteriormente Landau–Peierls a partir de la definición clásica de campo eléctrico $\xi=\frac{(p'-p)}{e\Delta t}$, donde p y p' son los momentos lineales de la carga e al comienzo y al final del intervalo temporal Δt durante el cual ella sufre la acción del campo por medirse, dedujeron que si ambos, p y p' son desconocidos en una cantidad ΔP, la indeterminación del campo cumple $e\Delta\xi\Delta t>\Delta P$, o sea

$$\Delta\xi>\frac{\Delta P}{e\Delta t}. \quad (20)$$

Combinando (20) con (19) se obtiene entonces que $\Delta\xi>\frac{\hbar}{ce(\Delta t)^2}\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}$, o sea

$$\Delta\xi>\frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}. \quad (21)$$

Luego Landau–Peierls dijeron que para la indeterminación en el campo magnético ΔH se puede lograr una expresión similar a (21), pero no hicieron explícito el cálculo, el cual es así: La fuerza magnética $\vec{F}_m$ para una partícula de velocidad $\vec{v}$ perpendicular a un campo magnético externo $\vec{H}$ tiene módulo $F_m=\frac{P_m}{\Delta t}=\frac{e}{c}vH$, de donde $\Delta P_m<\frac{e}{c}v\Delta t\Delta H$, es decir, utilizando el resultado (19), que $\frac{e}{c}v\Delta t\Delta H>\Delta P_m>\frac{\hbar}{c\Delta t}\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}$, a partir de lo cual se obtiene $\Delta H>\frac{\hbar}{ev(\Delta t)^2}\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}=\frac{\sqrt{\hbar c}}{vc(\Delta t)^2}$, y como $v<c$, finalmente se tendría

$$\Delta H>\frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}. \quad (22)$$

Multiplicando (21) con (22) se consigue el orden de magnitud con el cual se podrían medir las dos componentes electromagnéticas a la vez

$$\Delta\xi\Delta H>\frac{\hbar c}{(c\Delta t)^4}. \quad (23)$$

Observando las ecuaciones (21), (22) y (23) Landau–Peierls (1983) concluyeron que los conceptos de campo eléctrico o magnético sólo tendrían sentidos precisos para tiempos de medición largos ($\Delta t\rightarrow\infty$), es decir, para campos electrostáticos o magnetostáticos. En sus propias palabras: “en el rango cuántico,..., las magnitudes del campo no son cantidades medibles”.
Una conclusión totalmente similar a la de Landau–Peierls la siguieron manteniendo Berestetskii–Lifshitz–Pitaevskii (1975) a pesar de que Bohr–Rosenfeld (1983a) habían dado la solución al problema de no-medibilidad planteado por Landau-

Peierls, mucho antes de la publicación de su cuarto volumen de la reconocida colección de física teórica. La conclusión de Landau–Peierls de haberse mantenido, habría privado a la electrodinámica cuántica de toda base física. Más adelante se verá como Bohr–Rosenfeld refutaron a Landau–Peierls mostrando que sobreestimaron el campo de reacción de la partícula cargada de prueba, sin haber considerado tampoco un mecanismo macroscópico clásico adecuado de compensación para dicho campo de reacción.

5.2 Otro análisis al estilo de Landau-Peierls

Considerando la medición de una componente, por ejemplo $\bar{E}_x$, del campo eléctrico promediado sobre un intervalo de tiempo T, el cambio de momento lineal transferido desde el campo a un cuerpo de prueba cargado q durante el intervalo temporal T de exposición al campo será

$$p_x^f - p_x^i = q\bar{E}_x T , \quad (24)$$

donde p_x^i y p_x^f son los momentos lineales del cuerpo cargado al inicio y al final del intervalo *T*, respectivamente. Se asume que las mediciones de momento lineal se realizan en intervalos de tiempo $\Delta t << T$, de forma que al menos *T* sea igual a $2\Delta t$. En particular, cuanto más rápido varíe el campo más pequeño debe ser Δt. La precisión en la medición del momento lineal se supone que es igual a Δp_x y por el principio de indeterminación de Heisenberg se debe asumir una latitud incontrolable $\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x}$ en la posición del cuerpo de prueba durante la medición en el tiempo Δt, de donde

$$\Delta\bar{E}_x \approx \frac{\hbar}{q\Delta x\Delta t} = \frac{2\hbar}{q\Delta xT} \approx \frac{\hbar}{q\Delta xT} . \quad (25)$$

La cantidad (25) puede hacerse arbitrariamente pequeña para un Δx dado escogiendo q suficientemente grande. Un incremento en q aumenta, sin embargo, la contribución del campo de reacción de ella misma producido por el movimiento que ella experimenta bajo el efecto del campo que se va a medir. Hay que ver entonces en qué extensión esta reacción da origen a indeterminaciones adicionales. Clásicamente para una partícula cargada no-relativista q, la energía emitida en la unidad de tiempo está dada por (17). En primera aproximación la ecuación de movimiento de la partícula es $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, pero hay que adicionar el término $\vec{F}^r$ (fuerza de reacción) que se toma de la energía perdida (17). El trabajo realizado por $\vec{F}^r$ durante el intervalo de tiempo *T* debe ser entonces igual a la energía radiada total y su cálculo (Heitler (1984)) dado por $\int_0^T (\vec{F}^r \cdot \vec{v})dt$ implica después de integrar por partes que $\vec{F}^r$ debe ser igual a $\vec{F}^r = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}\right) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)$. Por lo tanto

$$F_x^r \Delta t = \delta_q p_x^r \approx \frac{q^2}{c^3}\frac{\Delta x}{(\Delta t)^2} , \quad (26)$$

representa el momento lineal transferido por radiación de la carga de prueba q. Si (26) se considera una indeterminación adicional en el momento lineal, en vez de (25) se obtiene que $\Delta\bar{E}_x \approx \frac{\hbar}{q\Delta xT} + \Delta^{(1)}\bar{E}_x$, donde $\Delta^{(1)}\bar{E}_x = \frac{\Delta F_x^r}{q} \approx \frac{q}{c^3}\frac{\Delta x}{(\Delta t)^3} = \frac{2q\Delta x}{c^3 T(\Delta t)^2} \approx \frac{q\Delta x}{c^3 T(\Delta t)^2}$. O sea

$$\Delta\bar{E}_x \approx \frac{\hbar}{q\Delta xT} + \frac{q\Delta x}{c^3 T(\Delta t)^2} , \quad (27)$$

y su valor mínimo por variación de q se establece con los criterios de la primera y segunda derivadas, obteniéndose para tal efecto que $q = c\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\sqrt{\hbar c}$. Reemplazando esta q en (27) se obtiene que

$$\Delta\bar{E}_{x_{mínima}} \approx \frac{2\sqrt{\hbar c}}{c^2 T\Delta t} \geq \frac{\sqrt{\hbar c}}{(cT)^2} , \quad (28)$$

la cual está de acuerdo con la fórmula (21). Considerando ahora la medición de la componente $\bar{H}_z$, por ejemplo, del campo magnético promediado sobre un intervalo de tiempo T, el cambio de momento lineal transferido desde el campo a un cuerpo de prueba cargado q, con rapidez $v_y << c$, durante el tiempo *T* de exposición al campo será

$$p_x^f - p_x^i = \frac{q}{c} v_y \bar{H}_z T , \quad (29)$$

donde p_x^i y p_x^f son los momentos lineales del cuerpo cargado al inicio y al final del intervalo *T*, respectivamente. Por el principio de indeterminación de Heisenberg se puede obtener que

$$\Delta\overline{H}_z \approx \frac{\hbar c}{q\Delta x T v_y} . \quad (30)$$

La cantidad (30) puede hacerse arbitrariamente pequeña para una v_y y un Δx dados escogiendo q suficientemente grande. Un incremento en q aumenta, como se ha visto, la contribución al campo de reacción de ella misma producido por el movimiento que ella experimenta bajo el efecto del campo que se va a medir. La indeterminación adicional en el momento lineal además de la expresión (30) sería entonces

$$\Delta^{(I)}\overline{H}_z = \frac{\Delta F_x^r c}{q v_y} \approx \frac{q}{v_y c^2}\frac{\Delta x}{(\Delta t)^3} = \frac{q}{v_y c^2}\frac{2\Delta x}{T(\Delta t)^2} \approx \frac{q}{v_y c^2}\frac{\Delta x}{T(\Delta t)^2} . \quad (31)$$

La indeterminación total en el promedio de la componente magnética es

$$\Delta\overline{H}_z \approx \frac{\hbar c}{q\Delta x T v_y} + \frac{q}{v_y c^2}\frac{\Delta x}{T(\Delta t)^2} , \quad (32)$$

cuyo valor mínimo se logra exactamente como se hizo en el caso anterior, dando que

$$\Delta\overline{H}_{z_{mínima}} \approx \frac{\sqrt{\hbar c}}{T^2 v_y c} \geq \frac{\sqrt{\hbar c}}{(cT)^2} , \quad (33)$$

la cual coincide con (22). La indeterminación mínima en la medición de dos componentes sería

$$\left(\Delta\overline{E}_x \Delta\overline{H}_z\right)_{mínima} \approx \frac{\hbar c}{(cT)^4} , \quad (34)$$

la cual también coincide con (23).

6. TEORÍA CUÁNTICA DE LA MEDICIÓN DE BOHR-ROSENFELD PARA COMPONENTES ELÉCTRICAS

La teoría de la medición de Landau-Peierls nunca fue criticada por Bohr-Rosenfeld, más bien, a diferencia de Landau-Peierls, Bohr-Rosenfeld mostraron que a pesar de que la cuantización del campo electromagnético libre pone limitaciones en las mediciones de pares de componentes, que surgen de su no-conmutabilidad, no existe, sin embargo, limitación alguna en la definición de una sola componente.

Uno de los puntos decisivos en el análisis de Bohr-Rosenfeld fue el reconocimiento de que las componentes del campo electromagnético cuántico libre evaluadas en puntos del espacio-tiempo, se usan en el formalismo solamente como idealizaciones, sin significado físico inmediato y que las únicas afirmaciones con sentido físico de la teoría se refieren a promedios de tales componentes sobre regiones finitas del espacio-tiempo. Ello significa que para estudiar la medibilidad de las componentes del campo electromagnético cuántico libre, deben utilizarse como cuerpos de prueba distribuciones macroscópicas cuánticas finitas de carga y/o corriente y no cargas microscópicas cuánticas como hasta esa época se había considerado de manera poco rigurosa.

Ahora bien, Bohr-Rosenfeld no agotaron todos los posibles casos de medición de componentes del campo electromagnético cuántico libre. Les faltó considerar la medición de una sola componente magnética cuántica libre en una región dada del espacio-tiempo, lo que se hará aquí y, tampoco trataron la medición de dos componentes magnéticas cuánticas libres paralelas entre sí y perpendiculares entre sí, con cada una de las componentes en una región finita del espacio-tiempo (Pedraza (2006)).

6.1 Consideraciones físicas sugeridas por el formalismo

En las relaciones de conmutación de las componentes del campo electromagnético cuántico libre (Heitler (1984)) en dos puntos definidos del espacio-tiempo, sólo entran las constantes $\hbar$ y c y derivadas espacio-temporales de la función δ de Dirac. Como con $\hbar$ y c no se asocia ninguna escala fundamental en alguna dimensión espacio-temporal específica (para ello se necesitarían además las masas y las cargas fundamentales (Noyes (1994)), se puede utilizar como cuerpo de prueba una distribución extensa de carga o corriente macroscópica cuántica de densidad esencialmente constante. Por otra parte, la función δ de Dirac es una cantidad operacional que sólo tiene sentido cuando ocurre bajo una integral. Concluyeron entonces Bohr-Rosenfeld que el único sentido no ambiguo lo tienen las integrales espacio-temporales de las componentes del campo.

Es así como algunas de las relaciones de indeterminación predichas por el formalismo (Bohr-Rosenfeld (1983a)) son

$$\Delta\overline{E}_x^{(I)}\Delta\overline{E}_x^{(II)} = \Delta\overline{H}_x^{(I)}\Delta\overline{H}_x^{(II)} \approx \hbar\left|\overline{A}_{xx}^{(I,II)} - \overline{A}_{xx}^{(II,I)}\right|, \quad (35)$$

$$\Delta\overline{E}_x^{(I)}\Delta\overline{H}_z^{(II)} = \Delta\overline{H}_x^{(I)}\Delta\overline{E}_z^{(II)} \approx \hbar\left|\overline{B}_{xz}^{(I,II)} - \overline{B}_{xz}^{(II,I)}\right|, \quad (36)$$

donde, por ejemplo

$$\overline{E}_x^{(I)} = \frac{1}{V_I T_I}\int_{T_I} dt_1 \int_{V_I} E_x dv_1 , \quad (37)$$

es el promedio de E_x en la región espacio–temporal I, con volumen V_I y duración T_I.

Además, haciendo $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ y $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ se tiene

$$\overline{A}_{xx}^{(I,II)} = -\frac{1}{V_I V_{II} T_I T_{II}}\int_{T_I} dt_1 \int_{T_{II}} dt_2 \int_{V_I} dv_1 \int_{V_{II}} dv_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}, \quad (38)$$

$$\overline{B}_{xz}^{(I,II)} = -\frac{1}{V_I V_{II} T_I T_{II}}\int_{T_I} dt_1 \int_{T_{II}} dt_2 \int_{V_I} dv_1 \int_{V_{II}} dv_2 \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial y_2}\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}. \quad (39)$$

Las diferencias $\overline{A}^{(I,II)} - \overline{A}^{(II,I)}$ y $\overline{B}^{(I,II)} - \overline{B}^{(II,I)}$ desaparecen sin discontinuidad cuando las fronteras de las regiones I y II se hacen coincidir gradualmente. De esto se sigue que los promedios de todas las componentes del campo sobre la misma región del espacio–tiempo conmutan y, deben ser exactamente medibles independientemente una de la otra. Por el hecho de que las expresiones $\overline{A}^{(I,II)} - \overline{A}^{(II,I)}$ cambian su signo cuando los tiempos t_1 y t_2 se intercambian, los promedios de dos componentes de la misma clase sobre dos regiones de espacio – tiempo arbitrarias conmutan si los intervalos de tiempo asociados coinciden. Además, la correspondiente antisimetría de las cantidades $\overline{B}^{(I,II)} - \overline{B}^{(II,I)}$ bajo el intercambio de los puntos espaciales $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ implica que los promedios de dos componentes de diferente clase sobre dos intervalos temporales arbitrarios, conmutan cuando las regiones espaciales coinciden.

El formalismo indica también que la relación de indeterminación para una sola componente de campo sobre la misma región de espacio–tiempo no debe estar sometida a restricción alguna. O sea que la medición de una sola componente de campo debe poder realizarse con precisión arbitraria.

6.2 Estructura del cuerpo de prueba macroscópico cuántico

Escogiendo la región de medición del campo con volumen $V = L^3$ y duración T, y observando que dicha medición reposa por definición en la transferencia de momento lineal al cuerpo de prueba situado en el campo durante instantes Δt ocupados en cada medición individual de momento lineal, al inicio y al final del intervalo T, se concluye que debe hacerse Δt tan pequeño como sea posible, y ello en especial si el campo medido varía rápido con el tiempo. Se tiene entonces que $\Delta t << T$.

Asociándole también al cuerpo de prueba una gran masa, su aceleración debida a la acción del campo, puede obviamente hacerse muy pequeña.

Supóngase que las mediciones de momento lineal del cuerpo de prueba se hacen en la dirección x y que su indeterminación es Δp_x; a pesar de que se puede escoger el cuerpo de prueba suficientemente masivo como para despreciar la aceleración que adquiere bajo la acción del campo medido, el cuerpo puede sin embargo adquirir durante Δt una rapidez v_x que puede ser grande aún si Δp_x y Δt son pequeños. En efecto, de acuerdo con las relaciones $\Delta H = v_x \Delta p_x$ y $\Delta H \Delta t \approx \hbar$, donde ΔH es la indeterminación en la energía del cuerpo de prueba durante el tiempo de medición Δt, se tiene que $v_x \approx \dfrac{\hbar}{\Delta p_x \Delta t}$. Esta rapidez se puede no obstante compensar mediante un dispositivo mecánico que, después de cada medición de momento lineal, proporcione un contra-impulso al cuerpo de prueba de modo que reduzca su rapidez a cero. Se puede considerar, entonces, que con la excepción del lapso de tiempo Δt que toma cada medición, el cuerpo de prueba está siempre en reposo, luego su posición prácticamente no cambia.

La aproximación de cuerpo rígido es necesaria para asegurar que el único efecto del campo medido sobre el cuerpo de prueba sea un desplazamiento global del cuerpo. Sin embargo, como el cuerpo tiene una extensión finita, deben tomarse en cuenta efectos de retardo debidos a la propagación finita de las interacciones. En particular se quiere que $cT < L$, pues de lo contrario el campo medido tendrá tiempo para propagarse de un extremo al otro del cuerpo de prueba durante el tiempo T de exposición al campo. Esa propagación tenderá entonces a enmascarar la dependencia temporal que se quiere medir. El caso opuesto $cT \geq L$, aún en el dominio clásico, es de poco interés, puesto que todas las peculiaridades de los campos ondulatorios dentro del volumen $V = L^3$ son a la larga atenuadas por el proceso de promediar en la propagación durante el intervalo de tiempo *T*.

Ahora, dado que la rapidez de propagación de las interacciones es *c*, el tiempo que se requiere para dar a un cuerpo de prueba extenso de longitud *L*, considerado como un todo, un momento lineal bien definido, es del orden de $\delta\, t \approx \frac{L}{c} > T$. Entonces el tiempo de medición Δt no podrá cumplir la condición $\Delta t << T$ pues ello implicaría $\Delta t << \delta\, t$ y el cuerpo, como un todo, no alcanzará, durante el tiempo de medición, a adquirir un momento lineal bien definido por la acción del campo. Se debe pensar, entonces, en un cuerpo de prueba que consista en un sistema de τ componentes individuales, cada uno con dimensión L_τ suficientemente pequeña como para despreciar en él todos los efectos de retardo, o sea $L_\tau << c\Delta t$, y tales que la distancia mutua entre ellos no cambie durante el proceso de medición.

6.3 Medición del momento lineal del cuerpo de prueba

La medición del momento lineal total del cuerpo de prueba se realiza mejor por medios ópticos, por ejemplo, por determinación del efecto Doppler. Un arreglo de medición tal consiste en una fuente de luz S y un conjunto de espejos fijos en el laboratorio. Además, todos los pequeños cuerpos de prueba llevan un espejo pequeño ubicado perpendicularmente al eje *x*. Acomodando los espejos fijos en forma tal que el camino óptico atravesado por la luz desde la fuente hasta cada uno de los pequeños cuerpos, después de reflejarse en los espejos fijos, sea el mismo para todos ellos; se puede lograr que todos los pequeños cuerpos adquieran simultáneamente la misma aceleración, con tal que el número de cuantos de luz desde la fuente sea grande comparado con el número de pequeños cuerpos de los cuales el cuerpo de prueba total está compuesto.

La variación temporal está determinada solamente por la extensión en la frecuencia $\Delta\nu$ de los paquetes de luz, y se puede mostrar que si $\Delta\nu$ es pequeña respecto de la frecuencia de radiación misma, antes y después de la reflexión sobre los cuerpos de prueba, el momento lineal total puede definirse con la precisión exigida por la desigualdad de Heisenberg.

Considerando entonces la interacción entre el sistema de pequeños cuerpos de prueba y el paquete de radiación y, asumiendo la pequeñez de la rapidez de cada uno de estos cuerpos comparada con *c*, se obtiene para el balance de momento lineal y energía en el choque perfectamente elástico que ocurre que

$$-\sum_{n_\tau} \hbar k' - m_\tau v'_{\tau,x} = \sum_{n_\tau} \hbar k'' - m_\tau v''_{\tau,x}\,,$$

$$\frac{1}{2} m_\tau v''^2_{\tau,x} + \sum_{n_\tau} \hbar\nu'' = \frac{1}{2} m_\tau v'^2_{\tau,x} + \sum_{n_\tau} \hbar\nu'\,,$$

donde m_τ denota la masa del $\tau-$ésimo cuerpo componente; $v'_{\tau,x}$ y $v''_{\tau,x}$ son sus rapideces antes y después de la reflexión y donde la sumatoria se extiende sobre todos los n_τ cuantos de luz reflejados desde el cuerpo componente, cuyas frecuencias antes y después de la reflexión se denotan por ν' y ν'' respectivamente, tal que $k' = \frac{\nu'}{c}$ y $k'' = \frac{\nu''}{c}$.

A partir de las ecuaciones (40) se obtiene que el momento lineal del $\tau-$ésimo cuerpo componente, antes y después de la colisión es

$$\left.\begin{matrix} p'_{\tau,x} = m_\tau v'_{\tau,x} \\ p''_{\tau,x} = m_\tau v''_{\tau,x} \end{matrix}\right\} = m_\tau c \sum_{n_\tau} \left(\nu' \mp \nu''\right) \mp \frac{\hbar}{2c} \sum_{n_\tau} \left(\nu' + \nu''\right) \quad . \quad (41)$$

Si se supone que la frecuencia espectral media $\nu_o >> \Delta\nu = \frac{1}{\Delta t} = \nu'' - \nu'$ y como $\nu' \approx \nu_o$, se tiene que $\sum_{n_\tau} \left(\nu' + \nu''\right) = 2 n_\tau \nu_o$, de donde $v''_{\tau,x} - v'_{\tau,x} = \frac{2 n_\tau \nu_o \hbar}{m_\tau c}$, que es igual para todos los τ cuerpos componentes. Entonces para el producto

$\Delta p_x \Delta x$, donde $\Delta x = \left| v_x^f - v_x^i \right| \Delta t$ representa el desplazamiento del cuerpo de prueba durante la medición en el intervalo Δt y donde v_x^i y v_x^f son las rapideces adquiridas por el cuerpo durante las mediciones inicial y final respectivamente; se obtiene de las desigualdades obvias $\left| v_x^f - v_x^i \right| < c$ y $\Delta x < c\Delta t$, que las relaciones $\Delta p_x \Delta x \approx \Delta H \Delta t \approx \hbar$ se cumplen para el cuerpo de prueba total, como ya se había afirmado. Esto permite que fuera de los intervalos de tiempo ocupados en la medición del momento lineal, como ya se dijo, los cuerpos de prueba ocupados en la medición del campo se puedan considerar en reposo.

Para no perturbar el campo a ser medido, cada cuerpo de prueba eléctrico (carga) o magnético (corriente) se colocará adyacente a un cuerpo neutralizante con exactamente la carga opuesta o la corriente opuesta (a través de hilos flexibles magnetizables) respectivamente, anulándose las cargas y formándose circuitos cerrados de corriente. De esta forma se asegura que las únicas influencias en el campo desde el cuerpo de prueba son: 1) dos corrientes perdurables durante Δt al comienzo y al final del intervalo T y 2) un dipolo estático resultante del desplazamiento del cuerpo de prueba con respecto al agente neutralizante durante la parte restante del intervalo T, en la cual este está en reposo. La posición del cuerpo de prueba prácticamente no cambia, pero hay una indeterminación en su posición al medir el momento lineal y esa indeterminación da lugar al dipolo. Debido a todo lo anterior, el cuerpo de prueba estudiado es lo menos perturbador posible.

6.4 Crítica de Bohr-Rosenfeld a Landau–Peierls

En palabras de Roldán-Ben-Dov-Guerrero (Roldán-Ben-Dov-Guerrero (2004), Roldán (2007)), para Bohr la meta de la ciencia es el aumento y el ordenamiento de la experiencia humana comunicable sin ambigüedad. Él llama la atención sobre el aspecto lingüístico que hay detrás de la noción mencionada de ciencia. ¿Cuál es el lenguaje que nos permite llegar a la no-ambigüedad? Es razonable aceptar con Bohr que para tener experiencias científicas es necesario desarrollar un lenguaje exento de ambigüedad. El sostiene que sólo se posee un lenguaje que se puede desnudar de ambigüedad y ese no es otro que el lenguaje común y ordinario, el lenguaje humano, el único que se tiene y el único que siempre se tendrá. En su uso ordinario ese lenguaje está repleto de ambigüedades, pero puede sin embargo refinarse y despojarse de ambigüedades. Para Bohr la física clásica es sólo un refinamiento de ese lenguaje común. El punto fuerte de Bohr es su consideración de que, en la física, es el lenguaje de la física clásica el que permite y permitirá siempre definir contextos de no-ambigüedad o sea contextos científicos. Su argumento es que, sin importar cuán abstracta sea una teoría, para confrontarla con la experiencia son necesarios los conceptos clásicos, ya que sólo mediante ellos podemos comunicar sin ambigüedad tanto las descripciones de los aparatos como los resultados de medición. Para Bohr un fenómeno cuántico es una totalidad indivisible que incluye el aparato de observación. En esa totalidad, sin embargo, se debe hacer una distinción fundamental entre el instrumento y el resto del fenómeno. El instrumento es aquel aspecto del fenómeno cuántico que se describe por la física clásica.

Según la anterior tesis de la unicidad del lenguaje común inmersa en la interpretación Bohriana de la mecánica cuántica, el formalismo electromagnético cuántico se tiene que aplicar a mediciones de campo definidas en términos clásicos. Por tanto, las interacciones entre el campo que se mide y el cuerpo de prueba que define la medición deben describirse clásicamente. Igualmente el cuerpo de prueba como fuente de campo debe describirse clásicamente, pero como ente que se manipula a través de sus momentos lineales, debe describirse cuánticamente. Esto último justifica también porque Landau–Peierls usaron fórmulas clásicas y cuánticas para los cuerpos de prueba en sus análisis.

En línea con las anteriores aseveraciones, Howard (1994) dijo que Bohr requirió una descripción clásica de algunos aspectos del instrumento, pero no de todos, y más sorprendente quizás, también una descripción clásica de algunos aspectos del sistema físico observado. Más específicamente, Bohr exigió una descripción clásica sólo de aquellas propiedades del instrumento que están correlacionadas en la interacción de medición con las propiedades del sistema físico bajo observación, y esto implica también, una descripción clásica de las propiedades del sistema estudiado asociadas con la medición. Una descripción cuántica será posible para las propiedades restantes del instrumento y el sistema físico bajo estudio.

Al respecto los Bokulich (2005) dijeron que Bohr no solamente enfatizó que los conceptos clásicos son esenciales en el análisis de las mediciones, sino también esenciales en dar significado al formalismo abstracto de la teoría cuántica. Con respecto al análisis de medición del campo electromagnético cuántico libre realizado por Bohr-Rosenfeld (1983a) los Bokulich afirmaron que los anteriores autores lograron conectar el formalismo abstracto de la electrodinámica cuántica con las posibilidades de observación formulando un contexto en el cual las leyes de la física clásica se aplican apropiadamente.

Criticando a Landau-Peierls, Bohr–Rosenfeld afirmaron que las mediciones de cantidades físicas, por definición, deben ser materia de la aplicación de los conceptos clásicos. Se debe distinguir entonces entre las restricciones de la constitución del cuerpo de prueba provenientes de la estructura atómica de la materia y las restricciones sobre el manipuleo de este cuerpo que son debidas al principio de indeterminación de Heisenberg. La estructura atómica debe despreciarse, o sea, los cuerpos de prueba deben comportarse como cuerpos macroscópicos rígidos uniformemente cargados, con densidad ρ extendida uniformemente sobre todo el volumen $V = L^3$ bajo investigación, cuya masa se supone tan grande que su aceleración bajo la influencia del campo por medirse es despreciable. La masa y la carga del cuerpo de prueba son parámetros independientes en su ajuste. Por otro lado, en el manipuleo de este cuerpo se mide su momento lineal con una precisión limitada por el principio de indeterminación de Heisenberg. Lo último debe tomarse en consideración para medir los efectos cuánticos del campo. La distinción entre efectos de la estructura del cuerpo de prueba y efectos cuanto-mecánicos que surgen de su manipulación, son el punto esencial de la teoría cuántica de la medición.

En analogía con la ecuación (24) se puede escribir entonces la siguiente fórmula clásica de interacción entre el cuerpo de prueba y el campo medido

$$p_x^f - p_x^i = \rho \overline{E}_x VT , \quad (42)$$

lo mismo que en analogía con (29) se tiene

$$p_x^f - p_x^i = \frac{\rho}{c} v_y \overline{H}_z VT . \quad (43)$$

Como el cuerpo de prueba prácticamente no se mueve, no producirá campo magnético de reacción $\vec{H}^r$, tal que de la ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{H}^r = 0 = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^r}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ se obtiene $\frac{d\vec{E}^r}{dt} = -4\pi \vec{j}$. En la dirección x se tendría entonces $E_x^r \approx \rho \Delta x$, donde se ha hecho $j_x = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

El campo de reacción que surge en la medición del campo magnético también es proporcional a ρ, como se verá en otra sección a través de un cálculo detallado.

Reemplazando el anterior campo de reacción en la ecuación (42), el momento lineal transferido por radiación será del orden

$$\delta_\rho p_x^r \approx \rho(\rho \Delta x) V \Delta t = \rho^2 V \Delta x \Delta t . \quad (44)$$

De la relación $\Delta p_x \Delta x \approx \hbar$ se obtiene de (42) y (43) que

$$\Delta \overline{E}_x \approx \frac{\hbar}{\rho \Delta x VT} , \quad (45)$$

y

$$\Delta \overline{H}_z \approx \frac{\hbar c}{\rho v_y \Delta x VT} , \quad (46)$$

valores a partir de los cuales se pueden obtener los mismos resultados problemáticos de Landau–Peierls si se hace $q = \rho V$.

Ahora bien, dividiendo (26) por (44), se tiene que $\frac{\delta_q p_x^r}{\delta_\rho p_x^r} = \frac{q^2}{c^3 \rho^2 (\Delta t)^3 V}$ y considerando de nuevo $q = \rho V$, se obtiene finalmente la desigualdad $\frac{\delta_q p_x^r}{\delta_\rho p_x^r} = \frac{V}{c^3 (\Delta t)^3} = \frac{L^3 T^3}{(cT)^3 (\Delta t)^3} = \left(\frac{L}{cT}\right)^3 \left(\frac{T}{\Delta t}\right)^3 >> 1$, o sea

$$\delta_q p_x^r >> \delta_\rho p_x^r , \quad (47)$$

pues $L > cT$ y $T >> \Delta t$. Fue así como Bohr–Rosenfeld redujeron considerablemente el papel que desempeñaba la radiación de reacción para Landau–Peierls. Es decir, la radiación de reacción de un cuerpo de prueba microscópico es mucho mayor que la de uno macroscópico.

6.5 Campo electromagnético clásico de reacción producido por el cuerpo de prueba macroscópico cuántico

Considérense (Bohr-Rosenfeld (1983a)) dos regiones de espacio – tiempo con volúmenes $V_I = L_I^3$ y $V_{II} = L_{II}^3$ y duraciones T_I y T_{II}. Al preguntarse por el campo electromagnético producido por el cuerpo de prueba en el punto $P_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ de la región *II* por una medición de $\overline{E}_x^{(I)}$ sobre la región *I*, se asume que en el volumen V_I hay originalmente dos distribuciones de carga con densidades constantes $+\rho_I$ y $-\rho_I$, la del cuerpo de prueba y la de su cuerpo neutralizante.

Como se ha dicho anteriormente, fuera de los intervalos de tiempo ocupados en la medición del momento lineal, los cuerpos de prueba empleados en la medición del campo se pueden considerar en reposo. Para este efecto el cuerpo neutralizante se pega al sistema de referencia por medio de tornillos y así se mantiene durante el proceso total de medición. El cuerpo de prueba en sí, antes de tomar la primera medición del momento lineal, se une al sistema de referencia por medio de un brazo mecánico dispuesto de forma tal que encaje entre un pestillo adherido con tornillos al sistema de referencia y otro pestillo adherido al cuerpo de prueba. Todos estos artefactos son neutrales, incluyendo allí el dispositivo para medir los momentos lineales del cuerpo de prueba y no contribuyen con campo electromagnético alguno que pueda perturbar el campo por medirse. El brazo mecánico que se ha considerado está controlado por medio de un reloj cuyo diseño le permite atar o desatar ambos pestillos en determinados tiempos escogidos a conveniencia. En el intervalo desde t'_I a $t'_I + \Delta t'_I$ el cuerpo de prueba se desata del sistema de referencia y se hace la medición de su momento lineal inicial $p_x^{(I)\ i}$. Como se dijo antes, al medir $p_x^{(I)\ i}$ durante $\Delta t'_I$ el cuerpo adquiere una rapidez $v_x^{(I)}{'} \approx \dfrac{\hbar}{\Delta p_x^{(I)\ i} \Delta t'_I}$ y experimenta un desplazamiento en la dirección x igual a $D_x^{(I)}$, el cual se mide con una regla graduada adherida con unos tornillos al sistema de referencia ($D_x^{(I)} \approx v_x^{(I)}{'} \Delta t'_I$).

Inmediatamente después de la medición se imprime al cuerpo un contragolpe a fin de compensar $v_x^{(I)}{'}$ y asegurar que al medir el momento lineal final $p_x^{(I)\ f}$ sólo se tenga en cuenta la acción del campo a medir. Esto es posible pues se conoce el orden de magnitud de $v_x^{(I)}{'}$. El contragolpe se da por medio de una palanca accionada con un resorte cuya constante no necesita especificarse. El mecanismo está conectado también con un reloj, el cual registra los cambios temporales. El golpe se le propina al cuerpo de prueba sobre una barra rígida incrustada dentro de él.

Se deja luego que el campo actúe sobre el cuerpo hasta el tiempo t''_I. Como el cuerpo se toma muy masivo se puede aproximar diciendo que la distancia recorrida desde $t'_I + \Delta t'_I$ hasta t''_I es despreciable frente a $D_x^{(I)}$. Si $\Delta t'_I$ se toma muy pequeño frente a $T_I = t''_I - t'_I$, se puede decir que durante T_I el cuerpo está quieto a una distancia $D_x^{(I)}$ del cuerpo neutralizante.

Finalmente en t''_I se mide p_x^f durante $\Delta t''_I$ y se da de inmediato un contragolpe que ahora regresa el cuerpo a su posición inicial. Se toma entonces que $\Delta t'_I \approx \Delta t''_I << T_I$ y se puede decir que, con la excepción de los intervalos $\Delta t'_I$ después de t'_I y $\Delta t''_I$ después de t''_I, cuando se hacen las mediciones de momento lineal, el cuerpo está quieto. El cuerpo se mueve entonces durante $\Delta t'_I$ cuando adquiere una rapidez $v'^{(I)}_x = \dfrac{D_x^{(I)}}{\Delta t'_I}$ y durante $\Delta t''_I$ cuando adquiere una rapidez $v''^{(I)}_x = -\dfrac{D_x^{(I)}}{\Delta t''_I}$. Estos movimientos del cuerpo producen una fuente de campo igual a una densidad de corriente total $J_x^{(I)} = \rho_I D_x^{(I)} \left[\left(\dfrac{1}{\Delta t'_I} \right) - \left(\dfrac{1}{\Delta t''_I} \right) \right]$. Los intervalos $\Delta t'_I$ y $\Delta t''_I$ al principio y al final del intervalo T_I respectivamente, o sea en t'_I y t''_I respectivamente, se toman tan pequeños que se puede expresar la densidad de corriente como $J_x^{(I)}$

$= \rho_I D_x^{(I)}\left[\delta(t-t'_I)-\delta(t-t''_I)\right]$

$= -\rho_I D_x^{(I)} \int_{t'_I}^{t''_I} \frac{\partial}{\partial t_1}\delta(t-t_1)\ dt_1$. Por otra parte se puede afirmar que durante T_I el cuerpo está en reposo a una distancia $D_x^{(I)}$ del cuerpo neutralizante, más los instantes en que se mueve al principio y al final de T_I son despreciables. Se tiene entonces otra fuente de campo igual a un dipolo eléctrico estático en la dirección x con densidad constante $P_x^{(I)} = \rho_I D_x^{(I)}$ duradero en el intervalo de t'_I a t''_I.

Con ayuda de las propiedades de la función δ de Dirac, la polarización se puede expresar como $P_x^{(I)} = \rho_I D_x^{(I)} \int_{t'_I}^{t''_I} \delta(t-t_1)\ dt_1$. Ahora bien, el potencial escalar de una densidad de momento de dipolo en un punto arbitrario espacio–temporal P_2 es $\phi_x^{(I)}(P_2) = \rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}$, con $r = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$.

Para el potencial vector la densidad de corriente $J_x^{(I)}$ produce el valor $\psi_x^{(I)}(P_2) = -\rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}$. Entonces las componentes de los campos en el punto P_2 son

$$E_x^{(I)}(P_2) = -\frac{\partial \phi_x^{(I)}(P_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_x^{(I)}(P_2)}{c\partial t_2}$$

$$= -\rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t_1 \partial t_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$= \rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 A_{xx}^{(1,2)}, \quad (48)$$

$$E_y^{(I)}(P_2) = -\frac{\partial \phi_x^{(I)}(P_2)}{\partial y_2}$$

$$= -\rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$= \rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 A_{xy}^{(1,2)}, \quad (49)$$

$$E_z^{(I)}(P_2) = -\frac{\partial \phi_x^{(I)}(P_2)}{\partial z_2}$$

$$= -\rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$= \rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 A_{xz}^{(1,2)}, \quad (50)$$

$$H_x^{(I)}(P_2) = 0, \quad (51)$$

$$H_y^{(I)}(P_2) = \frac{\partial \psi_x^{(I)}(P_2)}{\partial z_2}$$

$$= -\rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 \left(\frac{\partial^2}{c\partial t_1 \partial z_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$= \rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 B_{xy}^{(1,2)}, \quad (52)$$

$$H_z^{(I)}(P_2) = -\frac{\partial \psi_x^{(I)}(P_2)}{\partial y_2}$$

$$= \rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 \left(\frac{\partial^2}{c\partial t_1 \partial y_2}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$= -\rho_I D_x^{(I)} \int_{V_I} dv_1 \int_{T_I} dt_1 B_{xz}^{(1,2)}. \quad (53)$$

Los promedios espacio–temporales sobre la región II de estas componentes de campo son de particular interés en el problema general de la medición de las cantidades del campo electromagnético cuántico libre y se obtienen de las anteriores expresiones por simple integración espacio–temporal sobre la región nombrada. Sus valores son

$$\overline{E}_x^{(I,II)} = +D_x^{(I)} \rho_I V_I T_I \overline{A}_{xx}^{(I,II)}, \quad (54)$$

$$\overline{E}_y^{(I,II)} = +D_x^{(I)} \rho_I V_I T_I \overline{A}_{xy}^{(I,II)}, \quad (55)$$

$$\overline{E}_z^{(I,II)} = +D_x^{(I)} \rho_I V_I T_I \overline{A}_{xz}^{(I,II)}, \quad (56)$$

$$\overline{H}_x^{(I,II)} = 0, \quad (57)$$

$$\overline{H}_y^{(I,II)} = +D_x^{(I)} \rho_I V_I T_I \overline{B}_{xy}^{(I,II)}, \quad (58)$$

$$\overline{H}_z^{(I,II)} = -D_x^{(I)}\rho_I V_I T_I \overline{B}_{xz}^{(I,II)}. \quad (59)$$

Con base en las propiedades de las funciones $\overline{A}$ y $\overline{B}$ se nota que para cualquier $D_x^{(I)}$ establecido, los promedios anteriores son funciones continuas bien definidas en las regiones I y II y proporcionales simplemente al desplazamiento constante del cuerpo de prueba en el intervalo de medición T_I. Este hecho permitirá la compensación extensiva de los efectos de campo incontrolables del dipolo y de las corrientes a través de un dispositivo mecánico macroscópico clásico descrito más adelante.

6.6 Medición de una componente eléctrica cuántica libre

Para determinar por ejemplo $\overline{E}_x^{(I)}$, el balance de momento lineal del cuerpo de prueba es

$$p''^{(I)}_x - p'^{(I)}_x = \rho_I V_I T_I\left(\overline{E}_x^{(I)} + \overline{E}_x^{(I,I)}\right), \quad (60)$$

con $p'^{(I)}_x$ y $p''^{(I)}_x$ como componentes x del momento lineal del cuerpo de prueba al inicio y al final del intervalo temporal T_I. Es obvio que las componentes $\overline{E}_y^{(I,I)}$ y $\overline{E}_z^{(I,I)}$ no van en el balance de momento lineal (60), pero debido a las rapideces v_x adquiridas por ρ_I bajo el efecto de $\overline{E}_x^{(I)}$ al comienzo y al final de T_I, se presenta la nombrada densidad de corriente que sugeriría que los efectos sobre ρ_I de las componentes $\overline{H}_y^{(I,I)}$ y $\overline{H}_z^{(I,I)}$ deberían tenerse en cuenta. Pero recuérdese que las rapideces v_x se pueden hacer nulas existiendo de todos modos la densidad de corriente y no sintiéndose entonces los efectos de los campos anteriores.

De la ecuación (60) se obtiene que

$$\Delta\overline{E}_x^{(I)} \approx \frac{\Delta p_x^{(I)}}{\rho_I V_I T_I} + \Delta\overline{E}_x^{(I,I)} \approx \frac{\hbar}{\rho_I \Delta x_I V_I T_I} + \rho_I \Delta x_I V_I T_I \left|\overline{A}_{xx}^{(I,I)}\right|$$

, asumiéndose que $D_x^{(I)}$ está en el rango Δx_I. El valor mínimo de $\Delta\overline{E}_x^{(I)}$ por variación de ρ_I se obtiene con los criterios de la primera y segunda derivadas para tal efecto, obteniéndose el valor crítico $\rho_I = \dfrac{1}{V_I \Delta x_I T_I}\sqrt{\dfrac{\hbar}{\left|\overline{A}_{xx}^{(I,I)}\right|}}$, que al reemplazarlo da

$$\Delta\overline{E}_{x_{mínima}}^{(I)} \approx \sqrt{\hbar\left|\overline{A}_{xx}^{(I,I)}\right|}, \quad (61)$$

el cual sería un límite inevitable en la precisión de la medición en contradicción con la teoría. Pero como según lo indica la fórmula (54), el campo $\overline{E}_x^{(I,I)}$ sólo depende de relaciones geométricas y su efecto se puede compensar atando el cuerpo de prueba a un sistema rígido por medio de una tuerca y a través de un resorte cuya tensión sea proporcional a $D_x^{(I)}$. O sea en vez de (60) se tendría

$$p''^{(I)}_x - p'^{(I)}_x = \rho_I V_I T_I\left(\overline{E}_x^{(I)} + \overline{E}_x^{(I,I)}\right) - k_I D_x^{(I)} T_I, \quad (62)$$

lo que sugiere el valor siguiente para la constante elástica del resorte macroscópico clásico

$$k_I = \rho_I^2 V_I^2 T_I \left|\overline{A}_{xx}^{(I,I)}\right|, \quad (63)$$

colocándose finalmente que

$$\Delta\overline{E}_x^{(I)} \approx \frac{\hbar}{\rho_I \Delta x_I V_I T_I}, \quad (64)$$

cuya magnitud se puede hacer muy pequeña escogiendo ρ_I suficientemente grande, en acuerdo con el formalismo electromagnético cuántico y coincidiendo con la ecuación (45).

7. TEORÍA CUÁNTICA DE LA MEDICIÓN DE PEDRAZA AL ESTILO DE BOHR-ROSENFELD PARA COMPONENTES MAGNÉTICAS

En el trabajo realizado por Bohr-Rosenfeld (1983a) no se estudió la medición de una sola componente magnética cuántica libre en una región específica del espacio-tiempo. Tampoco se consideró la medición de dos componentes magnéticas cuánticas libres paralelas entre sí y perpendiculares entre sí, con cada una de ellas en una región finita del espacio-tiempo.

A continuación, entonces, se realizará el análisis de la medición de una sola componente magnética y tanto el problema de las fluctuaciones del vacío en la medición en cuestión, como los demás casos, pueden ser consultados en Pedraza (2004a, 2006, 2007).

7.1 Estructura del cuerpo de prueba macroscópico cuántico

Para medir promedios espacio - temporales de componentes magnéticas cuánticas libres no tiene sentido utilizar cuerpos de prueba microscópicas, es decir, cargas microscópicas en movimiento. Los cuerpos de prueba serán entonces densidades de corriente macroscópicas rígidas desplazables. La aproximación de ser rígidas ya se ha estudiado antes. Si por ejemplo se quiere medir la componente promedio $\overline{H}_x$ en la región de espacio-tiempo con volumen $V = L^3$ y duración T utilizando la densidad de corriente j_z que llena enteramente el volumen anterior, la fórmula clásica de la interacción entre dicha corriente y la componente medida, estará dada por la siguiente expresión de Lorentz

$$p''_y - p'_y = j_z V T \overline{H}_x , \quad (65)$$

donde p'_y y p''_y son las componentes y del momento lineal del cuerpo de prueba al inicio y al final del intervalo temporal T de exposición al campo que se mide, las cuales se pueden determinar con un aparato que mida el momento lineal.

Este tratamiento, en términos de la fuerza sobre la componente j_z de la densidad de corriente, parece equivocado, pues las corrientes no pueden ir sólo en una dirección, ellas deben formar caminos cerrados, y por lo tanto, la fuerza del campo magnético sobre el cuerpo de prueba no puede deberse a una corriente que va en una sola dirección. No obstante, puede asumirse sin pérdida de generalidad que en el interior de la región de medición, hay una distribución de corriente lo suficientemente larga como para ser recta ahí.

Si Δt es por definición el intervalo de tiempo ocupado en cada medición individual de momento lineal, para tener una buena medición del promedio debe hacerse Δt tan pequeño como sea posible, y ello en especial si el campo medido varía rápido con el tiempo. O sea $\Delta t << T$. Asociándole también al cuerpo de prueba una gran masa, su aceleración debida a la acción del campo puede obviamente hacerse muy pequeña. Más adelante, cuando se calcule el campo electromagnético de reacción producido por el cuerpo de prueba, se verá que por ejemplo $H^r_{j_z} \approx j_z \Delta y$ es el orden de magnitud de cualquier componente magnética del cuerpo en mención, donde Δy es el desplazamiento del cuerpo de prueba durante la medición en el tiempo Δt. Entonces de la fórmula (65), el momento lineal transferido por radiación $\delta_{j_z} p_y$ será del orden

$$\delta_{j_z} p_y \approx j_z V \Delta t \left(j_z \Delta y \right) = j_z^2 V \Delta t \Delta y , \quad (66)$$

que se puede hacer tan pequeño como se quiera haciendo Δt tan pequeño como sea necesario. Recuérdese que cuanto más pequeño sea Δt, mejor es la medición.

De la relación $\Delta p_y \Delta y \approx \hbar$ se sigue, utilizando la expresión (65), que la indeterminación en el promedio del campo es del orden

$$\Delta \overline{H}_x \approx \frac{\hbar}{j_z \Delta y V T} . \quad (67)$$

Además, a pesar de que se puede escoger el cuerpo de prueba suficientemente masivo como para despreciar la aceleración que adquiere bajo la acción del campo medido, el cuerpo puede sin embargo adquirir durante Δt una rapidez v_y que puede ser grande aún si Δp_y y Δt son pequeños. En efecto, de acuerdo con las relaciones $\Delta H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_y} \right) \Delta p_y = v_y \Delta p_y$ y $\Delta H \Delta t \approx \hbar$ se tiene que $v_y \approx \frac{\hbar}{\Delta p_y \Delta t}$, siendo ΔH la indeterminación en la energía del cuerpo de prueba durante el tiempo de medición Δt.

La rapidez anterior se puede compensar mediante un dispositivo mecánico que, después de cada medición de momento lineal, proporcione un contra-impulso al cuerpo de prueba de modo que reduzca su rapidez a cero. Se puede considerar, entonces, que con excepción del lapso de tiempo Δt que toma cada medición, el cuerpo de prueba está siempre en reposo. Se puede entonces suponer que su posición prácticamente no cambia. A este respecto vale la pena aclarar que Δy se puede hacer tan pequeño como se quiera a expensas de Δp_y y la indeterminación correspondiente en $\Delta\overline{H}_x$, que es del orden de $\dfrac{\Delta p_y}{j_z VT}$ se puede compensar haciendo j_z tan grande como sea necesario.

7.2 Campo electromagnético clásico de reacción producido por el cuerpo de prueba macroscópico cuántico

Considérense dos regiones de espacio-tiempo *I* y *II* con volúmenes V_I y V_{II} y duraciones T_I y T_{II}, preguntándose entonces por el campo electromagnético producido en el punto $P_2 = \left(x_2, y_2, z_2, t_2\right)$ de la región *II* por una medición del promedio de H_x en la región *I*. Se supone que en el volumen V_I hay originalmente dos distribuciones o densidades de corriente $+j_z^{(I)}$ y $-j_z^{(I)}$, la del cuerpo de prueba y la de su cuerpo neutralizante. Como se ha dicho en la sección inmediatamente anterior, fuera de los intervalos de tiempo ocupados en la medición del momento lineal, los cuerpos de prueba empleados en la medición del campo se pueden considerar en reposo. Para este efecto el cuerpo neutralizante se pega al sistema de referencia por medio de tornillos y así se mantiene durante el proceso total de medición. El cuerpo de prueba en sí, antes de tomar la primera medición de momento lineal, se une al sistema de referencia por medio de un brazo mecánico dispuesto de forma tal que encaje entre un pestillo adherido con tornillos al sistema de referencia y otro pestillo adherido al cuerpo de prueba. Todos estos artefactos son neutrales de carga y corriente, incluyendo allí el dispositivo para medir los momentos lineales del cuerpo de prueba, y no contribuyen con producción de campo electromagnético alguno que pudiese perturbar además, el campo por medirse. El brazo mecánico que se ha considerado está controlado por medio de un reloj cuyo diseño le permite atar o desatar ambos pestillos en determinados tiempos escogidos a conveniencia. En el intervalo desde t'_I a $t'_I + \Delta t_I$ el cuerpo de prueba se desata del sistema de referencia experimentando un desplazamiento simple no-uniforme bajo la acción del campo por medirse en la dirección *y* a través de una distancia $D_y^{(I)}$, la cual se mide por medio de una regla graduada adherida con unos tornillos al sistema de referencia. En el intervalo desde $t'_I + \Delta t_I$ a t''_I, es decir, en el intervalo $\Delta t_o = t''_I - \left(t'_I + \Delta t_I\right)$, este permanece en reposo en la posición desplazada.

Para lograr que el cuerpo se detenga, se le ha imprimido durante el tiempo Δt_I un contragolpe por medio de una palanca accionada con un resorte cuya constante elástica no es necesario especificar; también perteneciente al reloj, el cual está registrando las cantidades temporales de medición. El golpe se le propina al cuerpo de prueba sobre una barra rígida incrustada dentro de él. Finalmente en el intervalo desde t''_I a $t''_I + \Delta t_I$ se mueve paralelo al eje *y* de forma no-uniforme de regreso a su posición original.

La mayor parte del tiempo el cuerpo está quieto puesto que $\Delta t_I + \Delta t_o = T_I = t''_I - t'_I$ y si $\Delta t_I << T_I$, entonces $T_I \approx \Delta t_o$. Es decir que $\Delta t_I << T_I$, $D_y^{(I)} << L$ y $D_y^{(I)} << c\Delta t_I$.

La fuente de campo es entonces una magnetización que da lugar a un momento de dipolo $\vec{m} = \dfrac{1}{2c}\int\limits_V \left[\vec{r} \times \vec{J}\left(\vec{r}\right)\right] dv$, de donde $\vec{M} = \dfrac{d\vec{m}}{dv} = \dfrac{1}{2c}\vec{r} \times \vec{J}\left(\vec{r}\right)$. Tomando en el caso bajo estudio que $\vec{r} = D_y^{(I)}\hat{j}$ y $\vec{J}\left(\vec{r}\right) = j_z^{(I)}\hat{k}$ se obtiene que $\vec{m} = \dfrac{1}{2c} D_y^{(I)} j_z^{(I)} V_I \hat{i}$, es decir

$$\vec{m} = m_x^{(I)} V_I \hat{i}\,, \quad (68)$$

donde $m_x^{(I)} = \dfrac{1}{2c} D_y^{(I)} j_z^{(I)}$. Además $\vec{M} = \dfrac{\vec{m}}{V_I} = \dfrac{1}{2c} D_y^{(I)} j_z^{(I)} \hat{i}$, de donde

$$\vec{M} = M_x^{(I)} \hat{i}\,, \quad (69)$$

con $M_x^{(I)} = \dfrac{1}{2c} D_y^{(I)} j_z^{(I)}$.

La expresión (69) también se puede escribir como $\vec{M} = \dfrac{1}{2c} D_y^{(I)} j_z^{(I)} \hat{i} \int\limits_{t'_I}^{t''_I} \delta\left(t - t_1\right) dt_1$, pues la magnetización dura entre t'_I y t''_I, o sea

$$\vec{M} = M_x^{(I)}\hat{i}\int_{t'_I}^{t''_I}\delta(t-t_1)dt_1 \ . \quad (70)$$

El potencial vectorial obtenido es

$$\vec{\psi}^{(I)}(P_2) = \int_{V_I} c\vec{\nabla}_1 \times \left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv_1 , \quad (71)$$

con $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ y $\vec{M} = \left(M_x^{(I)},0,0\right)$.

Entonces las componentes del potencial vectorial son

$$\psi_x^{(I)}(P_2) = \int_{V_I} c\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{M_z^{(I)}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{M_y^{(I)}}{r}\right)\right] dv_1 = 0 \quad , \quad (72)$$

$$\psi_y^{(I)}(P_2) = \int_{V_I} c\left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{M_x^{(I)}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{M_z^{(I)}}{r}\right)\right] dv_1$$

$$= \int_{V_I} c\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{M_x^{(I)}}{r}\right) dv_1 ,$$

$$\psi_z^{(I)}(P_2) = \int_{V_I} c\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{M_y^{(I)}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{M_x^{(I)}}{r}\right)\right] dv_1$$

$$= -\int_{V_I} c\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{M_x^{(I)}}{r}\right) dv_1 .$$

La situación de medición bajo consideración no presenta potencial escalar $\phi^{(I)}(P_2)$.

A continuación se calcularán las componentes del campo electromagnético producido por el cuerpo de prueba, haciendo antes más explícitas las componentes *y* y *z* del potencial vectorial, las cuales quedan así

$$\psi_y^{(I)}(P_2) = \int_{V_I} \frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{\frac{1}{2}D_y^{(I)} j_z^{(I)} \int_{t'_I}^{t''_I} \delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right) dt_1}{r}\right] dv_1 \quad , \quad (73)$$

$$\psi_z^{(I)}(P_2) = -\int_{V_I} \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{\frac{1}{2}D_y^{(I)} j_z^{(I)} \int_{t'_I}^{t''_I} \delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right) dt_1}{r}\right] dv_1 \quad , \quad (74)$$

donde se han considerado los efectos de retardo haciendo $t = t_2 - \dfrac{r}{c} = t_2 - \dfrac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{c}$.

Entonces a partir de $\vec{E}^{(I)} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{\psi}^{(I)}}{\partial\ t_2}$ se puede calcular

$$E_x^{(I)}(P_2) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_x^{(I)}(P_2)}{\partial t_2} = 0 , \quad (75)$$

pues $\psi_x^{(I)}(P_2) = 0$. Similarmente

$$E_y^{(I)}(P_2) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_y^{(I)}(P_2)}{\partial t_2} = \frac{1}{2}D_y^{(I)} j_z^{(I)}$$

$$\int_{T_I} dt_1 \int_{V_I} dv_1 \left[-\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial z_1}\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}\right], \text{ o sea}$$

$$E_y^{(I)}(P_2) = \frac{1}{2}D_y^{(I)} j_z^{(I)} \int_{T_I} dt_1 \int_{V_I} dv_1 B_{xy}^{(2,1)} . \quad (76)$$

También se obtiene que

$$E_z^{(I)}(P_2) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_z^{(I)}(P_2)}{\partial t_2} = -\frac{1}{2}D_y^{(I)} j_z^{(I)}$$

$$\int_{T_I} dt_1 \int_{V_I} dv_1 \left[-\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial y_1}\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2 - t_1 - \frac{r}{c}\right)\right\}\right], \text{ o sea}$$

$$E_z^{(I)}(P_2) = -\frac{1}{2}D_y^{(I)} j_z^{(I)} \int_{T_I} dt_1 \int_{V_I} dv_1 B_{xz}^{(2,1)} . \quad (77)$$

Hallando ahora las componentes magnéticas a partir de $\vec{H}^{(I)} = \vec{\nabla}_2 \times \vec{\psi}^{(I)}$, se obtiene que

$$\vec{H}^{(I)} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial z_2} \\ \psi_x^{(I)} & \psi_y^{(I)} & \psi_z^{(I)} \end{vmatrix}, \quad \text{o sea}$$

$$H_x^{(I)}(P_2)=\frac{\partial\psi_z^{(I)}(P_2)}{\partial y_2}-\frac{\partial\psi_y^{(I)}(P_2)}{\partial z_2}\quad =\frac{1}{2}D_y^{(I)}j_z^{(I)}$$

$$\int_{T_I}dt_1\int_{V_I}dv_1\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2\partial y_1}+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial z_1}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2-t_1-\frac{r}{c}\right)\right\}\right]$$

, a la cual se le puede dar otra forma haciendo

$$D_{xx}^{(2,1)}=\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2\partial y_1}+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial z_1}\right)\left\{\frac{1}{r}\delta\left(t_2-t_1-\frac{r}{c}\right)\right\},\quad (78)$$

de donde

$$H_x^{(I)}(P_2)=-\frac{1}{2}D_y^{(I)}j_z^{(I)}\int_{T_I}dt_1\int_{V_I}dv_1 D_{xx}^{(2,1)}\ .\quad (79)$$

Similarmente

$$H_y^{(I)}(P_2)=-\frac{\partial\psi_z^{(I)}}{\partial x_2}=-\frac{1}{2}D_y^{(I)}j_z^{(I)}$$

$$\int_{T_I}dt_1\int_{V_I}dv_1 A_{xy}^{(2,1)}\ ,\quad (80)$$

$$H_z^{(I)}(P_2)=\frac{\partial\psi_y^{(I)}}{\partial x_2}=-\frac{1}{2}D_y^{(I)}j_z^{(I)}\int_{T_I}dt_1\int_{V_I}dv_1 A_{xz}^{(2,1)}\ .\quad (81)$$

Ahora, haciendo $-\frac{1}{2}D_y^{(I)}=+D_y^{(I)}$ una nueva variable y promediando las componentes (75), (76), (77), (79), (80) y (81) sobre la región espacio-temporal *II*, es posible obtener

$$\overline{E}_x^{(I,II)}=0\ ,\quad (82)$$

$$\overline{E}_y^{(I,II)}=-D_y^{(I)}j_z^{(I)}V_IT_I\overline{B}_{xy}^{(II,I)},\quad (83)$$

$$\overline{E}_z^{(I,II)}=+D_y^{(I)}j_z^{(I)}V_IT_I\overline{B}_{xz}^{(II,I)},\quad (84)$$

$$\overline{H}_x^{(I,II)}=+D_y^{(I)}j_z^{(I)}V_IT_I\overline{D}_{xx}^{(II,I)},\quad (85)$$

$$\overline{H}_y^{(I,II)}=+D_y^{(I)}j_z^{(I)}V_IT_I\overline{A}_{xy}^{(II,I)},\quad (86)$$

$$\overline{H}_z^{(I,II)}=+D_y^{(I)}j_z^{(I)}V_IT_I\overline{A}_{xz}^{(II,I)}.\quad (87)$$

7.3 Medición de una componente magnética cuántica libre

Se considera a continuación una medición simple de campo, a saber, la medición del valor promedio de H_x en una región de espacio-tiempo *I*. El balance de momento lineal será entonces

$$p''^{(I)}_y-p'^{(I)}_y=j_z^{(I)}V_IT_I\left(\overline{H}_x^{(I)}+\overline{H}_x^{(I,I)}\right),\quad (88)$$

siendo $\overline{H}_x^{(I)}$ el promedio de H_x en la región espacio - temporal I si no se hiciera ninguna medición sobre el cuerpo de prueba en el instante t'_I y $\overline{H}_x^{(I,I)}$ es el promedio de campo que surge de esta medición, cuya expresión clásica se da por la fórmula (85) suponiendo las regiones *I* y *II* iguales entre sí.

El promedio $\overline{H}_x^{(I)}$ puede determinarse con precisión arbitraria escogiendo el valor de $j_z^{(I)}$ suficientemente grande. Sin embargo, esto hace que $\overline{H}_x^{(I,I)}$ crezca también mucho, luego, la precisión lograble en la medición de $\overline{H}_x^{(I)}$ tiene el valor

$$\Delta\overline{H}_x^{(I)}\approx\frac{\Delta p_y^{(I)}}{j_z^{(I)}V_IT_I}+\Delta\overline{H}_x^{(I,I)}\ ,\quad (89)$$

el cual, suponiendo que el desplazamiento del cuerpo de prueba $D_y^{(I)}$ es del orden Δy_I, tiene valor

$$\Delta\overline{H}_x^{(I)}\approx\frac{\hbar}{j_z^{(I)}\Delta y_IV_IT_I}+j_z^{(I)}\Delta y_IV_IT_I\left|\overline{D}_{xx}^{(I,I)}\right|.\quad (90)$$

Hallando el valor mínimo de (90) por variación de $j_z^{(I)}$, se obtiene el valor crítico

$$j_z^{(I)}=\frac{1}{\Delta y_IV_IT_I}\sqrt{\frac{\hbar}{\left|\overline{D}_{xx}^{(I,I)}\right|}}\ ,\quad (91)$$

el cual al reemplazarlo en (90) permite hallar la indeterminación mínima

$$\Delta\overline{H}_{x\ mínima}^{(I)}\approx\sqrt{\hbar\left|\overline{D}_{xx}^{(I,I)}\right|}\ .\quad (92)$$

Si (92) fuera un límite inevitable en la precisión de la medición de $\overline{H}_x^{(I)}$ se llegaría a la conclusión de que no es posible compensar el efecto del campo de prueba y la medición sólo tendría sentido en el límite clásico.

No obstante, el coeficiente del desplazamiento $D_y^{(I)}$ en $\overline{H}_x^{(I,I)}$ sólo depende de relaciones geométricas, permitiendo esto arreglar las cosas para que los efectos de $\overline{H}_x^{(I,I)}$ se compensen completamente. El dispositivo de medición se modifica atando el cuerpo de prueba, antes completamente libre durante el tiempo T_I, a un sistema rígido por medio de una tuerca y a través de un resorte cuya tensión sea proporcional al desplazamiento $D_y^{(I)}$. Entonces se tendría

$$p''^{(I)}_y - p'^{(I)}_y = j_z^{(I)} V_I T_I \left(\overline{H}_x^{(I)} + \overline{H}_x^{(I,I)} \right) - s_I D_y^{(I)} T_I \ , \quad (93)$$

lo cual sugiere que

$$s_I = j_z^{(I)2} V_I^2 T_I \left| \overline{D}_{xx}^{(I,I)} \right| , \quad (94)$$

es la constante del resorte macroscópico clásico.
El mecanismo no tendrá problemas en su aplicación pues, por tener el cuerpo de prueba una gran masa *m*, su período de oscilación bajo la influencia del resorte $\left(T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{s_I}} \right)$ es mucho mayor que T_I y su desplazamiento en este intervalo de tiempo será pequeño comparado con $D_y^{(I)}$ y con sus propias potencias desde el orden dos en adelante.
Finalmente se puede escribir que

$$\Delta \overline{H}_x \approx \frac{\hbar}{j_z^{(I)} \Delta y_I V_I T_I} \ , \quad (95)$$

para la cual no hay restricción en su pequeñez escogiendo $j_z^{(I)}$ suficientemente grande. Como se dijo antes, Bohr-Rosenfeld no agotaron todos los posibles casos de medición de componentes del campo electromagnético cuántico libre. Les faltó considerar también la medición de dos componentes magnéticas cuánticas libres paralelas entre sí y perpendiculares entre sí, con cada una de las componentes en una región finita del espacio-tiempo (Pedraza (2006)). Dicho estudio quedará para un trabajo posterior.

8. ANÁLISIS CRÍTICO DE PEDRAZA-BEJARANO A MENSKY Y VON-BORZESZKOWSKI-MENSKY

8.1 Teoría cuántica de la medición de Mensky y Von-Borzeszkowski-Mensky con integrales restringidas de Feynman

Considerando (Mensky (1993)), en general, un sistema caracterizado por la Lagrangiana $L = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t \right)$, y por la funcional de acción $S[q] = \int_{t'}^{t''} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t \right) dt$, donde q es un punto, generalmente multidimensional, del espacio de configuración, entonces la amplitud de probabilidad para que el sistema transite del punto $q' = q(t')$ al punto $q'' = q(t'')$, o propagador del sistema, puede expresarse por la integral de Feynman $U(t'', q''/t', q') = \int_{q'}^{q''} d[q] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$ sobre todos los caminos $[q] = \{ q(t) / t' \leq t \leq t'' \}$ conectando los puntos q' y q''.
Esto es válido en el caso cuando no se realizan mediciones en el intervalo $[t', t'']$, tal que no hay información disponible acerca del camino específico $[q]$ escogido por el sistema para la transición y debido a esto es necesario hacer la integración sobre todos los caminos.
Si una medición continua, prolongada en el tiempo, es realizada en el intervalo $[t', t'']$, entonces alguna información acerca de este camino es disponible al menos en principio. Esta información se expresa por la funcional w_α, tal que $0 \leq w_\alpha \leq 1$. Esto significa que el conocimiento del resultado de medición α permite estimar como probables aquellos caminos $[q]$ para los cuales $w_\alpha [q]$ es cercana a la unidad. Por el contrario, los caminos $[q]$ para los cuales w_α $[q]$ es cercana a cero deben considerarse improbables.
La integral de Feynman restringida, es decir, pesada estadísticamente, es $U_\alpha(t'', q''/t', q') = \int_{q'}^{q''} d[q] w_\alpha [q] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$, llamada también amplitud de medición.
Considérese la teoría de un campo relativístico ϕ (generalmente multicomponente) con la funcional de acción

$$S[\phi] = \int_\Omega d^4 x \, L(\phi, \partial\phi) , \quad (96)$$

dependiente de la configuración de campo $[\phi]$. La integración se realiza sobre alguna región de espacio-tiempo Ω y $\partial\phi$ denota derivadas parciales de ϕ en coordenadas.
La dinámica cuántica del campo puede describirse con la integral sobre configuraciones de campo. La amplitud

$$U=\int d[\phi]e^{iS[\phi]}, \quad (97)$$

en unidades naturales $(\hbar = constante\ \ de\ \ Planck\ \ dividida\ \ por\ \ 2\pi = 1)$, se realiza en la región Ω y depende de las condiciones de frontera impuestas sobre ϕ en la frontera $\partial\Omega$. La amplitud (97) es válida cuando no hay información disponible acerca de la configuración del campo dentro de la región Ω, tal que todas las configuraciones son tratadas de igual forma.

Denotando el resultado de medición por α y suponiendo que la información acerca del campo, debida a este resultado, está caracterizada por la funcional positiva $w_\alpha[\phi]$, la amplitud (97) debe cambiarse por

$$U_\alpha=\int d[\phi]w_\alpha[\phi]e^{iS[\phi]}. \quad (98)$$

El módulo al cuadrado

$$P_\alpha=|U_\alpha|^2, \quad (99)$$

da la probabilidad, o mejor, la densidad de probabilidad, de cada resultado de medición α.

8.2 Cálculo de la amplitud de medición para el campo electromagnético cuántico libre

Con base en la ecuación $S_{electromagnética}=-\frac{1}{4}\int F^{\mu\kappa}F_{\mu\kappa}d^4x$, se puede escribir la ecuación (97) en la forma

$$U=\int d[A]\delta(\partial_\mu A^\mu)\exp\left(-\frac{i}{4}\int d^4x(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\right), \quad (100)$$

siendo $d[\phi]=\delta(\partial_\mu A^\mu)\prod_{\mu,x}dA_\mu(x)$ la unidad de medida de la integración funcional sobre las configuraciones de campo y donde la integración se realiza sobre todos los valores $A_\mu(x)$ (en la región Ω) que satisfacen la condición adicional $\partial_\mu A^\mu=0$ (gauge de Lorentz), la cual en forma vectorial es $\vec{\nabla}.\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$. Se ha utilizado y se seguirá utilizando la notación $\partial_\mu A^\mu=\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$, $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ y $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu=\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$.

Reemplazando en (100) el resultado $F_{\mu\kappa}F^{\mu\kappa}=2(\vec{H}^2-\vec{E}^2)$, se obtiene que

$$U=\int d[A]\delta(\partial_\mu A^\mu)\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\left(\vec{H}_A^2-\vec{E}_A^2\right)\right), \quad (101)$$

donde $\vec{H}_A$ y $\vec{E}_A$ denotan las intensidades de los campos magnético y eléctrico correspondientes al cuadripotencial A_μ.

La fórmula (101) es válida si no existe información sobre la configuración del campo en la región Ω. Supóngase ahora que las mediciones de los campos magnético y eléctrico se hacen con las indeterminaciones ΔH y ΔE y "en cada punto" de la región Ω. Si los resultados de medición se representan por las configuraciones $\vec{H}(x)$ y $\vec{E}(x)$, entonces la información resultante acerca del campo puede caracterizarse por la funcional

$$w_{[\vec{H},\vec{E}]}[A]=\exp\left[-\frac{1}{w}\int d^4x\left(\frac{(\vec{H}_A-\vec{H})^2}{\Delta H^2}+\frac{(\vec{E}_A-\vec{E})^2}{\Delta E^2}\right)\right], \quad (102)$$

donde w es el volumen cuadridimensional de la región Ω.

Entre más grande sea la desviación cuadrática media del campo $\vec{H}_A$, $\vec{E}_A$ de la configuración $\vec{H}$, $\vec{E}$, más pequeña es la funcional (102). Esta funcional como se verá más adelante conduce a integrales funcionales Gaussianas.

La funcional (102) decrece por un factor e cuando la desviación cuadrática media del campo magnético se torna mayor que ΔH y/o en forma similar para el campo eléctrico.

Por lo tanto la funcional (102) describe el paquete de configuraciones que corresponde a la medición de campo dada por $[\vec{H},\vec{E}]$. Junto con esta funcional la ecuación (98) toma la forma

$$U_{[\vec{H},\vec{E}]}=\int d[A]\delta\left(\partial_\mu A^\mu\right)\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\left(\vec{H}_A^2-\vec{E}_A^2\right)-\frac{1}{w}\int d^4x\left(\frac{\left(\vec{H}_A-\vec{H}\right)^2}{\Delta H^2}+\frac{\left(\vec{E}_A-\vec{E}\right)^2}{\Delta E^2}\right)\right]. \quad (103)$$

La funcional integral (103) se puede calcular con ayuda de un truco común consistente en llevar las condiciones de frontera a cero.

Con $A^{clásico}$ representando una configuración de campo extrema (configuración clásica de campo) que satisface una condición de frontera en $\partial\Omega$ y con $\vec{H}_{clásico}$, $\vec{E}_{clásico}$ las correspondientes magnitudes de campo, se define el cuadripotencial B_μ por

$$A_\mu = A_\mu^{clásico}+B_\mu , \quad (104)$$

tomándolo como nueva variable de integración. Entonces

$$d[A]=d\left[A^{clásico}\right]+d[B],$$
$$\delta\left(\partial_\mu A^\mu\right)=\delta\left(\partial_\mu A^{clásico}\right)+\delta\left(\partial_\mu B^\mu\right),$$
$$\exp\left(-\frac{i}{4}\int d^4x\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\right)=\exp\left(iS\left(A^{clásico}\right)\right)$$
$$\exp\left(-\frac{i}{4}\int d^4x\left(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right)\right),$$

y realizando la integración sobre B_μ en las condiciones de frontera a cero. El cuadritensor de segundo rango antisimétrico $G_{\mu\nu}$ corresponde al cuadripotencial B_μ.Como se ha dicho con anterioridad que $A^{clásico}$ corresponde a una configuración extrema de campo, se tiene que $d\left[A^{clásico}\right]=0$. Además $\partial_\mu A^\mu=0$ y $\partial_\mu B^\mu=0$, lo que implica que $\partial_\mu A^{clásico}=0$ también. Es decir $\delta\left(\partial_\mu A^\mu\right)=\delta\left(\partial_\mu B^\mu\right)$.

Finalmente la integral funcional (103) se convierte en

$$U_{[\vec{H},\vec{E}]}=\exp\left(iS\left[A^{clásico}\right]\right)\int d[B]\delta\left(\partial_\mu B^\mu\right)\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\left(\vec{H}_B^2-\vec{E}_B^2\right)-\frac{1}{w}\int d^4x\left(\frac{\left(\vec{H}_B-\vec{H}'\right)^2}{\Delta H^2}+\frac{\left(\vec{E}_B-\vec{E}'\right)^2}{\Delta E^2}\right)\right], \quad (105)$$

donde $\vec{H}'$ y $\vec{E}'$ denotan las configuraciones $\vec{H}$ y $\vec{E}$ pero reducidas a las condiciones de frontera nulas, es decir

$$\vec{H}=\vec{H}_{clásico}+\vec{H}' \text{ y } \vec{E}=\vec{E}_{clásico}+\vec{E}'. \quad (106)$$

Haciendo

$$\alpha=\frac{w\Delta H^2}{2} \text{ y } \beta=\frac{w\Delta E^2}{2}, \quad (107)$$

la forma cuadrática en (105) se puede transformar como

$$-\frac{i}{2}\vec{H}_B^2-\frac{1}{w}\frac{\left(\vec{H}_B-\vec{H}'\right)^2}{\Delta H^2}$$
$$=\frac{2i}{2i}\left(-\frac{i}{2}\vec{H}_B^2-\frac{1}{w}\frac{\left(\vec{H}_B-\vec{H}'\right)^2}{\Delta H^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-\frac{2i}{w}\frac{\left(\vec{H}_B-\vec{H}'\right)^2}{\Delta H^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-\frac{i}{\alpha}\left(\vec{H}_B-\vec{H}'\right)^2\right)=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-i\alpha^{-1}\left(\vec{H}_B^2-2\vec{H}_B\vec{H}'+\vec{H}'^2\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2+2i\alpha^{-1}\vec{H}_B\vec{H}'-i\alpha^{-1}\vec{H}'^2\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2+2i\alpha^{-1}\vec{H}_B\vec{H}'-i\alpha^{-1}\left(\frac{i\alpha^2+2\alpha-i}{i\alpha^2+2\alpha-i}\right)\vec{H}'^2\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2+2i\alpha^{-1}\vec{H}_B\vec{H}'+i\left(\frac{i\alpha^2+2\alpha-i}{\alpha\left(-i\alpha^2-2\alpha+i\right)}\right)\vec{H}'^2\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2+2i\alpha^{-1}\vec{H}_B\vec{H}'+\frac{i}{i}\left(\frac{i\alpha^2+2\alpha-i}{\alpha\left(-\alpha^2+2i\alpha+1\right)}\right)\vec{H}'^2\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2-2\left(\frac{-i\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha\left(1+\alpha^2\right)}\right)\vec{H}_B\vec{H}'+\left(\frac{2\alpha+i\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha\left(1+2i\alpha-\alpha^2\right)}\right)\vec{H}'^2\right)=\frac{1}{2i}\left(\vec{H}_B^2-i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2\right.$$

$$-2\left(\frac{\alpha - i\alpha^2 - i - \alpha}{\alpha\left(1+\alpha^2\right)}\right)\vec{H}_B\vec{H}'$$

$$+\left(\frac{\alpha - i + \alpha\left(1+i\alpha\right)}{\alpha\left(1+i\alpha\right)^2}\right)\vec{H}'^2\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\vec{H}_B^2 - i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2$$

$$-2\left(\frac{(\alpha - i)(1-i\alpha)}{\alpha\left(1+i\alpha\right)(1-i\alpha)}\right)\vec{H}_B\vec{H}'$$

$$+\left(\frac{\alpha - i}{\alpha(1+i\alpha)^2} + \frac{1}{(1+i\alpha)}\right)\vec{H}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\vec{H}_B^2 - i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2 \; -2\left(\frac{(\alpha - i)}{\alpha\left(1+i\alpha\right)}\right)\vec{H}_B\vec{H}'$$

$$+\left(\frac{\alpha - i}{\alpha(1+i\alpha)^2}\right)\vec{H}'^2 + \left(\frac{1}{1+i\alpha}\right)\vec{H}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\vec{H}_B^2 - i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2 \; -2\left(\frac{\frac{\alpha - i}{\alpha}}{1+i\alpha}\right)\vec{H}_B\vec{H}'$$

$$+\left(\frac{\frac{\alpha - i}{\alpha}}{(1+i\alpha)^2}\right)\vec{H}'^2 + \left(\frac{1}{1+i\alpha}\right)\vec{H}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\vec{H}_B^2 - i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2 \; -2\left(\frac{1-\frac{i}{\alpha}}{1+i\alpha}\right)\vec{H}_B\vec{H}'$$

$$+\left(\frac{1-\frac{i}{\alpha}}{(1+i\alpha)^2}\right)\vec{H}'^2 + \left(\frac{1}{1+i\alpha}\right)\vec{H}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\vec{H}_B^2 - i\alpha^{-1}\vec{H}_B^2 \; -2\left(1-i\alpha^{-1}\right)(1+i\alpha)^{-1}\vec{H}_B\vec{H}'$$

$$+\left(1-i\alpha^{-1}\right)(1+i\alpha)^{-2}\vec{H}'^2 + (1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\left(1-i\alpha^{-1}\right)\vec{H}_B^2 - \left(1-i\alpha^{-1}\right)$$

$$\Big(2\vec{H}_B(1+i\alpha)^{-1}\vec{H}' \;\Big) + \left(1-i\alpha^{-1}\right)(1+i\alpha)^{-2}\vec{H}'^2$$

$$+(1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\left(1-i\alpha^{-1}\right)$$

$$\Big(\vec{H}_B^2 - 2\vec{H}_B(1+i\alpha)^{-1}\vec{H}' + (1+i\alpha)^{-2}\vec{H}'^2\Big)$$

$$+(1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\left(1-i\alpha^{-1}\right)$$

$$\left(\vec{H}_B - (1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'\right)^2 + (1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2\Big),$$

y haciendo $\vec{H}_C = \vec{H}_B - (1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'$ se tiene que

$$-\frac{i}{2}\vec{H}_B^2 - \frac{1}{w}\frac{\left(\vec{H}_B - \vec{H}'\right)^2}{\Delta H^2} = \frac{1}{2i}\Big(\left(1-i\alpha^{-1}\right)\vec{H}_C^2 + (1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2\Big) \quad . \quad (108)$$

Una ecuación análoga a (108) se obtiene para el campo eléctrico de la siguiente manera

$$\frac{i}{2}\vec{E}_B^2 \quad - \frac{1}{w}\frac{\left(\vec{E}_B - \vec{E}'\right)^2}{\Delta E^2}$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\vec{E}_B^2 + \frac{i}{\beta}(\vec{E}_B - \vec{E}')^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\vec{E}_B^2 + i\beta^{-1}\left(\vec{E}_B^2 - 2\vec{E}_B\vec{E}' + \vec{E}'^2\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\vec{E}_B^2 + i\beta^{-1}\vec{E}_B^2 \; - 2i\beta^{-1}\vec{E}_B\vec{E}' + i\beta^{-1}\vec{E}'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2$$

$$+2i\beta^{-1}\vec{E}_B\vec{E}' - i\beta^{-1}\left(\frac{-i\beta^2 + 2\beta + i}{-i\beta^2 + 2\beta + i}\right)\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2$$

$$+2i\beta^{-1}\vec{E}_B\vec{E}' - i\left(\frac{-i\beta^2 + 2\beta + i}{\beta\left(-i\beta^2 + 2\beta + i\right)}\right)\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2$$

$$+2i\beta^{-1}\vec{E}_B\vec{E}' - \frac{i}{i}\left(\frac{-i\beta^2 + 2\beta + i}{\beta\left(-\beta^2 - 2i\beta + 1\right)}\right)\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2 \; + 2\left(\frac{i\left(1+\beta^2\right)}{\beta\left(1+\beta^2\right)}\right)\vec{E}_B\vec{E}'$$

$$-\left(\frac{2\beta + i\left(1-\beta^2\right)}{\beta\left(1-2i\beta-\beta^2\right)}\right)\vec{E}'^2\Big) = \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2$$

$$+2\left(\frac{\beta + i\beta^2 + i - \beta}{\beta\left(1+\beta^2\right)}\right)\vec{E}_B\vec{E}'$$

$$-\left(\frac{\beta+i+\beta(1-i\beta)}{\beta(1-i\beta)^2}\right)\vec{E}'^2\Big) = \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2$$

$$+2\left(\frac{(\beta+i)(1+i\beta)}{\beta(1-i\beta)(1+i\beta)}\right)\vec{E}_B\vec{E}'$$

$$-\left(\frac{\beta+i}{\beta(1-i\beta)^2}+\frac{1}{(1-i\beta)}\right)\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2 + 2\left(\frac{(\beta+i)}{\beta(1-i\beta)}\right)\vec{E}_B\vec{E}'$$

$$-\left(\frac{\beta+i}{\beta(1-i\beta)^2}\right)\vec{E}'^2 - \left(\frac{1}{1-i\beta}\right)\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2 + 2\left(\frac{\frac{\beta+i}{\beta}}{1-i\beta}\right)\vec{E}_B\vec{E}'$$

$$-\left(\frac{\frac{\beta+i}{\beta}}{(1-i\beta)^2}\right)\vec{E}'^2 - \left(\frac{1}{1-i\beta}\right)\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2 + 2\left(\frac{1+\frac{i}{\beta}}{1-i\beta}\right)\vec{E}_B\vec{E}'$$

$$-\left(\frac{1+\frac{i}{\beta}}{(1-i\beta)^2}\right)\vec{E}'^2 - \left(\frac{1}{1-i\beta}\right)\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-\vec{E}_B^2 - i\beta^{-1}\vec{E}_B^2 + 2(1+i\beta^{-1})(1-i\beta)^{-1}\vec{E}_B\vec{E}'$$

$$-(1+i\beta^{-1})(1-i\beta)^{-2}\vec{E}'^2 - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(-(1+i\beta^{-1})\vec{E}_B^2 + (1+i\beta^{-1})$$

$$\left(2\vec{E}_B(1-i\beta)^{-1}\vec{E}'\right) - (1+i\beta^{-1})(1-i\beta)^{-2}\vec{E}'^2$$

$$-(1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\Big) = \frac{1}{2i}\Big(-(1+i\beta^{-1})$$

$$\left(\vec{E}_B^2 - 2\vec{E}_B(1-i\beta)^{-1}\vec{E}' + (1-i\beta)^{-2}\vec{E}'^2\right)$$

$$-(1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\Big) = \frac{1}{2i}\Big(-(1+i\beta^{-1})$$

$$\left(\vec{E}_B - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'\right)^2 - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\Big),$$

y haciendo $\vec{E}_C = \vec{E}_B - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'$ se tiene que

$$\frac{i}{2}\vec{E}_B^2 - \frac{1}{w}\frac{\left(\vec{E}_B - \vec{E}'\right)^2}{\Delta E^2} = \frac{1}{2i}\Big(-(1+i\beta^{-1})\vec{E}_C^2 - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\Big)$$

.

Es así como al reemplazar en (105) se obtiene que

$$U_{[\vec{H},\vec{E}]} = \exp\left(iS\left[A^{clásico}\right]\right)\int d[B]\delta\left(\partial_\mu B^\mu\right)$$

$$\exp\left[\int d^4x\left\{-\frac{i}{2}\vec{H}_B^2 - \frac{1}{w}\frac{\left(\vec{H}_B - \vec{H}'\right)^2}{\Delta H^2} + \frac{i}{2}\vec{E}_B^2 - \frac{1}{w}\frac{\left(\vec{E}_B - \vec{E}'\right)^2}{\Delta E^2}\right\}\right]$$

$$= \exp\left(iS\left[A^{clásico}\right]\right)\int d[B]\delta\left(\partial_\mu B^\mu\right)$$

$$\exp\left[\int d^4x\left\{\frac{1}{2i}\left\{(1-i\alpha^{-1})\vec{H}_C^2 + (1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2i}\left\{-(1+i\beta^{-1})\vec{E}_C^2 - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\right\}\right\}\right],$$

o sea

$$U_{[\vec{H},\vec{E}]} = \exp\Big(iS\left[A^{clásico}\right] - \frac{i}{2}$$

$$\int d^4x\left[(1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2 - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\right]\Big)$$

$$\int d[B]\delta\left(\partial_\mu B^\mu\right)$$

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\left[(1-i\alpha^{-1})\vec{H}_C^2 - (1+i\beta^{-1})\vec{E}_C^2\right]\right). \tag{109}$$

Es inmediato entonces el cálculo de $U^*_{[\vec{H},\vec{E}]}$ dado por

$$U^*_{[\vec{H},\vec{E}]} = \exp\Big(-iS\left[A^{clásico}\right] + \frac{i}{2}$$

$$\int d^4x\left[(1-i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2 - (1+i\beta)^{-1}\vec{E}'^2\right]\Big)$$

$$\int d[B]\delta\left(\partial_\mu B^\mu\right)$$

$$\exp\left(\frac{i}{2}\int d^4x\left[(1+i\alpha^{-1})\vec{H}_C^2 - (1-i\beta^{-1})\vec{E}_C^2\right]\right). \tag{110}$$

Nótese que al cambiar la variable de integración B_μ por C_μ, siendo el último el cuadripotencial

correspondiente a los campos $\vec{H}_C$ y $\vec{E}_C$, en la ecuación (109), se observa que esta integral no depende de $\vec{H}'$ y $\vec{E}'$.
Por lo tanto en el producto de (109) por (110) aparecerá un factor normalizante (que no interesa por el momento) que se puede omitir.
Finalmente el módulo al cuadrado de la amplitud de medición es

$$P_{[\vec{H},\vec{E}]} = U_{[\vec{H},\vec{E}]} U^*_{[\vec{H},\vec{E}]} = \left| U_{[\vec{H},\vec{E}]} \right|^2$$

$$\cong \exp\left\{ -\frac{i}{2}\int d^4x \left[(1+i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2 - (1-i\beta)^{-1}\vec{E}'^2 \right] \right\}$$

$$\exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[(1-i\alpha)^{-1}\vec{H}'^2 - (1+i\beta)^{-1}\vec{E}'^2 \right] \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[(1-i\alpha)^{-1} - (1+i\alpha)^{-1} \right] \vec{H}'^2 \right\}$$

$$\exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[(1-i\beta)^{-1} - (1+i\beta)^{-1} \right] \vec{E}'^2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[\frac{1}{1-i\alpha} - \frac{1}{1+i\alpha} \right] \vec{H}'^2 \right\}$$

$$\exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[\frac{1}{1-i\beta} - \frac{1}{1+i\beta} \right] \vec{E}'^2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[\frac{1+i\alpha-1+i\alpha}{1+\alpha^2} \right] \vec{H}'^2 \right\}$$

$$\exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[\frac{1+i\beta-1+i\beta}{1+\beta^2} \right] \vec{E}'^2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[\frac{2i\alpha}{1+\alpha^2} \right] \vec{H}'^2 \right\}$$

$$\exp\left\{ \frac{i}{2}\int d^4x \left[\frac{2i\beta}{1+\beta^2} \right] \vec{E}'^2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ \int d^4x \left[\frac{-\alpha}{1+\alpha^2} \right] \vec{H}'^2 \right\}$$

$$\exp\left\{ \int d^4x \left[\frac{-\beta}{1+\beta^2} \right] \vec{E}'^2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ \int d^4x \left[\frac{-1}{\alpha+\alpha^{-1}} \right] \vec{H}'^2 \right\}$$

$$\exp\left\{ \int d^4x \left[\frac{-1}{\beta+\beta^{-1}} \right] \vec{E}'^2 \right\},$$

o sea

$$P_{[\vec{H},\vec{E}]} \cong \exp\left\{ -\int d^4x \left[\frac{\vec{H}'^2}{\alpha+\alpha^{-1}} + \frac{\vec{E}'^2}{\beta+\beta^{-1}} \right] \right\}. \quad (111)$$

Esta cantidad no es más que una densidad de probabilidad para que la medición se exprese por la configuración $\left[\vec{H},\vec{E}\right]$.
Utilizando las igualdades (106) y (107) es posible transformar la ecuación (111) en

$$P_{[\vec{H},\vec{E}]}$$

$$\cong \exp\left\{ -\int_\Omega d^4x \left[\frac{\left(\vec{H}-\vec{H}_{clásico}\right)^2}{\frac{w\Delta H^2}{2} + \frac{2}{w\Delta H^2}} + \frac{\left(\vec{E}-\vec{E}_{clásico}\right)^2}{\frac{w\Delta E^2}{2} + \frac{2}{w\Delta E^2}} \right] \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\int_\Omega d^4x \left[\frac{\left(\vec{H}-\vec{H}_{clásico}\right)^2}{\frac{w^2\Delta H^4+4}{2w\Delta H^2}} + \frac{\left(\vec{E}-\vec{E}_{clásico}\right)^2}{\frac{w^2\Delta E^4+4}{2w\Delta E^2}} \right] \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\frac{2}{w}\int_\Omega d^4x \left[\frac{\left(\vec{H}-\vec{H}_{clásico}\right)^2}{\frac{w^2\Delta H^4+4}{w^2\Delta H^2}} + \frac{\left(\vec{E}-\vec{E}_{clásico}\right)^2}{\frac{w^2\Delta E^4+4}{w^2\Delta E^2}} \right] \right\},$$

o sea

$$P_{[\vec{H},\vec{E}]}$$

$$\cong \exp\left\{ -\frac{2}{w}\int_\Omega d^4x \left[\frac{\left(\vec{H}-\vec{H}_{clásico}\right)^2}{\Delta H^2 + \frac{4}{w^2\Delta H^2}} + \frac{\left(\vec{E}-\vec{E}_{clásico}\right)^2}{\Delta E^2 + \frac{4}{w^2\Delta E^2}} \right] \right\}. \quad (112)$$

La densidad de probabilidad para los resultados de medición se ha encontrado hasta un factor normalizante. La normalización no es necesaria por ahora, ya que sólo las probabilidades relativas de los diferentes resultados de medición serán utilizadas.

8.3 Interpretación de la distribución de probabilidad

La interpretación de la distribución de probabilidad (112) es evidente. Las mediciones más probables de los campos magnético y eléctrico en la región Ω

son $\left[\vec{H}_{clásico}, \vec{E}_{clásico}\right]$, definidos por la condición de frontera en $\partial\Omega$. Según (112) los resultados de medición $\left[\vec{H}, \vec{E}\right]$ pueden diferir de la configuración clásica en forma tal que las desviaciones cuadráticas medias

$$\left\|\vec{H} - \vec{H}_{clásico}\right\| = \frac{1}{w}\int_{\Omega} d^4x\left(\vec{H} - \vec{H}_{clásico}\right)^2 \text{ y}$$

$$\left\|\vec{E} - \vec{E}_{clásico}\right\| = \frac{1}{w}\int_{\Omega} d^4x\left(\vec{E} - \vec{E}_{clásico}\right)^2, \quad (113)$$

no sean muy grandes.

Ciertamente la densidad de probabilidad (112) se acerca a su máximo valor mientras el módulo del exponente es menor que la unidad, es decir, mientras las desviaciones (113) satisfagan las siguientes desigualdades

$$\left\|\vec{H} - \vec{H}_{clásico}\right\| \leq \delta H^2 \text{ y } \left\|\vec{E} - \vec{E}_{clásico}\right\| \leq \delta E^2, \quad (114)$$

con

$$\delta H^2 = \Delta H^2 + \frac{\Delta H^4_{óptimo}}{\Delta H^2} \text{ y}$$

$$\delta E^2 = \Delta E^2 + \frac{\Delta E^4_{óptimo}}{\Delta E^2}, \quad (115)$$

y

$$\Delta H^2_{óptimo} = \Delta E^2_{óptimo} = \frac{2}{w}. \quad (116)$$

Si las desviaciones (113) (o al menos una de ellas) excede los valores característicos (115), entonces la densidad de probabilidad (112) decae exponencialmente tal que los correspondientes resultados de medición se tornan prácticamente improbables. En otras palabras, los valores (115) caracterizan la variación de los resultados de medición.

Ahora bien, si $\Delta H >> \Delta H_{óptimo}$ y $\Delta E >> \Delta E_{óptimo}$, entonces el segundo término del lado derecho de cada una de las desigualdades (115) es despreciable, tal que (115) toma la forma

$$\delta H \cong \Delta H \text{ y } \delta E \cong \Delta E. \quad (117)$$

Esto significa que la variación de los resultados de medición es en este caso una consecuencia de las indeterminaciones de medición (aparato) solamente, en completo acuerdo con la teoría clásica. Por lo tanto bajo estas condiciones se da el régimen clásico de medición con los efectos cuánticos siendo despreciables. Este régimen corresponde a una medición suficientemente tosca. La variación de los resultados de medición en este régimen decrece mientras la medición se torne más precisa.

Si por el contrario $\Delta H << \Delta H_{óptimo}$ y $\Delta E << \Delta E_{óptimo}$, entonces el primer término en (115) se vuelve despreciable, tal que

$$\delta H \cong \frac{\Delta H^2_{óptimo}}{\Delta H} \text{ y } \delta E \cong \frac{\Delta E^2_{óptimo}}{\Delta E}. \quad (118)$$

Este es el régimen cuántico de medición y tiene carácter paradójico. El valor δH se incrementa mientras ΔH decrece. Por lo tanto entre más precisa sea la medición, más se incrementa la variación en los resultados de medición. Como resultado la información objetiva acerca del campo decrece. Esta es por supuesto una consecuencia inevitable del campo de reacción del artefacto de medición sobre el campo cuántico. Iguales consecuencias se pueden aseverar para δE y ΔE en la medición del campo eléctrico.

La cantidad $F_{\mu\kappa}$ no contiene implícitamente la interacción de la partícula con el campo a medir. No es claro entonces que se esté hablando del campo de reacción de una carga puntual de prueba. La lógica diría que el análisis anterior es independiente del tipo de aparato que se use para medir. Ahora, que hay un aparato de medición involucrado es obvio desde el momento en que se introduce, por ejemplo, $\vec{H}(x)$ y ΔH en el párrafo que sigue a la fórmula (101). Por eso se tiene derecho a hablar de aparatos de medición aún si sólo se usa $S_{electromagnética}$.

El último caso posible o régimen óptimo de medición está entre los regímenes clásico y cuántico, es decir, cuando $\Delta H \approx \Delta H_{óptimo}$ y $\Delta E \approx \Delta E_{óptimo}$. En esta situación la variación de los resultados de medición tiene su mínimo valor posible

$$\delta H_{mínimo} \approx \sqrt{2}\Delta H_{óptimo} \text{ y } \delta E_{mínimo} \approx \sqrt{2}\Delta E_{óptimo}. \quad (119)$$

Una medición en este régimen provee la máxima información objetiva acerca del estado del campo.

Las expresiones (119) dan una restricción absoluta en la precisión con la cual la magnitud del campo en cada punto de Ω puede estimarse por medio de arreglos de medición en los límites de Ω. Para una región Ω de longitud L y duración T, la restricción absoluta en la medibilidad de los campos es $\delta H_{mínimo} = \delta E_{mínimo} \approx \dfrac{2}{\sqrt{TL^3}}$, y utilizando unidades ordinarias se tiene

$$\delta H_{mínimo} = \delta E_{mínimo} \approx 2\sqrt{\frac{\hbar}{TL^3}} \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{cTL^3}}, \quad (120)$$

siendo c la rapidez de la luz.

Una pregunta clave es: ¿Cuál es fundamentalmente la razón por la que surge (120)? Se cree que al no considerar para nada de modo explícito un aparato de medición, no hay manera ni de compensar su efecto ni de darse cuenta de la necesidad de esa compensación, situación que se considera un punto flojo del análisis de Mensky (1993) y Von-Borzeszkowski-Mensky (1994).

8.4 Crítica de Pedraza-Bejarano a los análisis de Mensky y Von-Borzeszkowski-Mensky

Los autores Mensky (1993) y Von-Borzeszkowski-Mensky (1994) atribuyeron la fórmula (25) de Landau-Peierls a Bohr-Rosenfeld, lo cual puede ser si se hace $q = \rho V$. Además, ellos dijeron que la ley de Coulomb se cumple para la carga q del cuerpo de prueba en una región de medición de tamaño L, o sea que el campo de dicha carga es

$$E_{medición} \approx \frac{q}{L^2}, \quad (121)$$

resultado que puede hacerse compatible con el análisis tipo Bohr-Rosenfeld si se hace de nuevo $q = \rho V = \rho L^3$, es decir, $E_{medición} \approx \rho L$, cuyo orden de magnitud es el de la fórmula $E_x^r \approx \rho \Delta x$ a la cual llegaron Bohr-Rosenfeld.

Sumando las fórmulas (25) y (121) entre sí y hallando su valor óptimo con los criterios de la primera y segunda derivadas respecto de q, obtuvieron que

$$q^2_{óptima} = \frac{\hbar c L^2}{\Delta x c T}, \quad (122)$$

la cual al reemplazarla en la expresión suma les permitió hallar que

$$\delta E_{óptimo} \approx \frac{2}{L}\sqrt{\frac{\hbar c}{\Delta x c T}} = 2\sqrt{\frac{\hbar c}{\Delta x c T L^2}}. \quad (123)$$

Parecería que se debe incrementar Δx para disminuir la indeterminación (123), pero la indeterminación Δx en la medición de la posición del cuerpo de prueba no puede ser mayor que el tamaño L de la región de medición, es decir que $\Delta x \leq L$. Tomándose $\Delta x = L$ se obtendría el mínimo valor de (123), tal que

$$\delta E_{absoluto} \approx 2\sqrt{\frac{\hbar c}{cTL^3}} \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{cTL^3}}. \quad (124)$$

Fue aquí donde Von-Borzeszkowski-Mensky (1994) se equivocaron diciendo que la ecuación (124) coincide con la fórmula

$$\delta H_{mínimo} = \delta E_{mínimo} \approx 2\sqrt{\frac{\hbar}{TL^3}} \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{cTL^3}}, \quad (125)$$

puesto que ellos tenían en mente los análisis de Bohr-Rosenfeld cuando obtuvieron la expresión (125) y no los de Landau-Peierls. Además Mensky (1993) ya se había dado cuenta que en los análisis tipo Bohr-Rosenfeld no se obtiene restricción en la medición del campo como aquella de la fórmula (125).

8.5 Crítica de Pedraza-Bejarano a aspectos relacionados con la cuantización de la carga

A partir de (122) se puede obtener la relación entre L y Δx que sea compatible con una carga mayor que la carga electrónica *e*, es decir que se cumpla $q_{óptima} \geq e$, o sea $q^2_{óptima} \geq e^2$ y por lo tanto $\dfrac{\hbar c L^2}{\Delta x\, cT} \geq e^2$, de donde

$$\frac{L}{\Delta x} \geq \frac{e^2}{\hbar c}\frac{cT}{L} = \frac{1}{137}\frac{cT}{L}. \quad (126)$$

Si se escoge $L = \Delta x$ se obtiene $1 \geq \dfrac{1}{137}\dfrac{cT}{L}$, es decir

$$L \geq \frac{1}{137} cT, \quad (127)$$

para llegar al resultado (124).

Si se escoge ahora en particular $q_{óptima} = e$, o sea $q^2_{óptima} = e^2$, se obtiene $\dfrac{L}{\Delta x} = \dfrac{1}{137}\dfrac{cT}{L}$, y sin igualar L con Δx, se llega a través de (123) a $\delta E_{absoluto} \approx 2\dfrac{e}{L^2} = 2\sqrt{\dfrac{e^2}{\hbar c}}\sqrt{\dfrac{\hbar c}{L^4}}$, de donde

$$\delta E_{absoluto} \approx \frac{2}{\sqrt{137}}\frac{\sqrt{\hbar c}}{L^2} \approx \frac{1}{6}\frac{\sqrt{\hbar c}}{L^2}. \quad (128)$$

En la última fórmula la estructura discreta de la carga de la materia se ha tenido en cuenta, lo cual parece no ser posible de hacer en la aproximación de integrales restringidas de Feynman.
No se puede considerar en el enfoque Landau-Peierls la desigualdad $q_{óptima} < e$ con la cual se obtendría $\frac{L}{\Delta x} < \frac{1}{137}\frac{cT}{L}$, y al hacer $L = \Delta x$, $L < \frac{1}{137} cT$.
Esta restricción surge porque no se tuvo en cuenta la estructura del cuerpo de prueba, el cual desde un comienzo se ha supuesto microscópico.
En la frontera de las regiones $L \geq \frac{1}{137} cT$ y $L < \frac{1}{137} cT$ estaría la igualdad

$$L = \frac{1}{137} cT, \quad (129)$$

a partir de la cual se puede calcular, reemplazando en (124), que

$$\delta E_{absoluto} \approx 2\sqrt{\frac{\hbar c(137)^3}{(cT)^4}} = 2(137)\frac{\sqrt{\hbar c(137)}}{(cT)^2}. \quad (130)$$

Para ampliar este tópico el lector puede consultar la más reciente publicación de uno de los autores (Pedraza (2011)), donde ha completado y justificado la extensión del trabajo seminal de Bohr - Rosenfeld (1983a) sobre la medibilidad de las componentes del campo electromagnético cuántico libre a su trabajo pionero (Bohr - Rosenfeld (1983b)) sobre el control cuántico de las fluctuaciones del vacío y la medición de las relaciones de indeterminación carga-corriente.

CONCLUSIONES

1) Clásicamente los campos electrostáticos y magnetostáticos se pueden medir en principio con indeterminación nula, usando cargas y/o corrientes de prueba microscópicas clásicas.

2) La teoría de la medición de Landau-Peierls malinterpreta las condiciones de repetibilidad y predictibilidad en el dominio cuántico, malinterpreta la relación de indeterminación energía-tiempo y sus problemáticas ideas se han propagado hasta la actualidad a través de partes de tres de los tomos de la famosa colección de física teórica de Landau-Lifshitz-Berestetskii-Pitaevskii-Kosevich.

3) En la medición de las componentes eléctricas y/o magnéticas cuánticas libres es erróneo considerar cargas microscópicas cuánticas y/o corrientes debidas a dichas cargas como cuerpos de prueba. Es necesario en cambio usar distribuciones macroscópicas cuánticas de carga y/o corriente para poder medir los promedios espacio-temporales de dichas cantidades, y no sus valores puntuales, carentes de sentido físico.

4) Los casos de medición magnéticos que no realizaron Bohr-Rosenfeld han quedado verificados de manera similar a lo realizado por ellos en los casos eléctricos.

5) La cuantización del campo electromagnético libre está garantizada una vez la validez del principio de indeterminación de Heisenberg para los cuerpos de prueba macroscópicos esté dada. Además, la verificación analítica de los límites cuánticos impuestos por el formalismo se obtiene con experiencias de pensamiento considerando que las interacciones entre el campo cuántico que se mide y los cuerpos de prueba macroscópicos cuánticos que definen las mediciones deben describirse clásicamente. Igualmente los cuerpos de prueba macroscópicos cuánticos como fuentes de campo deben describirse clásicamente, pero en la manipulación de sus momentos lineales, deben describirse cuánticamente.

6) La teoría de Mensky y Von-Borzeszkowski-Mensky sólo mide una componente de campo electromagnético y parece no permitir medir dos componentes eléctricas y/o magnéticas en dos regiones espacio-temporales diferentes. No obstante, tiene la ventaja de no considerar un cuerpo de prueba y las complicaciones que ello conlleva. Sin embargo, Mensky y Von-Borzeszkowski-Mensky confundieron por esto mismo los análisis de Landau-Peierls y Bohr-Rosenfeld en repetidas ocasiones.

7) A la teoría de Mensky y Von-Borzeszkowski-Mensky también se le critica el no considerar para nada de modo explícito un aparato de medición, por lo cual no hay manera ni de compensar su efecto ni de darse cuenta de la necesidad de esa

compensación. Ellos tuvieron en cuenta la estructura discreta de la carga de la materia, lo cual parece no ser posible de hacer en la aproximación de integrales restringidas de Feynman. No tuvieron en cuenta la estructura del cuerpo de prueba, el cual desde un comienzo lo pensaron como microscópico.

8) Cuánticamente una componente eléctrica o magnética promedio se puede medir en principio con indeterminación nula, usando cargas y/o corrientes de prueba macroscópicas cuánticas.

9) Se han verificado las complementariedades clásico-microscópico y cuántico-macroscópico en la medición idealizada de campos electromagnéticos.

AGRADECIMIENTOS

El autor Luis G. Pedraza S., Ph. D. agradece la hospitalidad y acompañamiento académico ofrecidos durante la realización del presente artículo y del Postdoctorado en Física en la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, EE. UU., por el Profesor Luis F. Bejarano A., Ph. D. Igualmente agradece los invaluables apoyos académico y económico de la Pontificia Universidad Javeriana de Cali por medio del tiempo asignado por la Oficina de Investigación y Desarrollo al proyecto de investigación "El Problema de Sitnikov", del cual es fruto el presente artículo, y a las licencias remuneradas otorgadas por Mauricio Jaramillo A., Ph. D. (Decano Académico de la Facultad de Ingenierías) y Daniel González, M. Sc. (Director del Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas).

REFERENCIAS

Aharonov, Y. y Bohm, D. (1961): Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy, *Physical Review*, 122, p. 1649.

Berestetskii, V., Lifshitz, E. y Pitaevskii, L. (1975): *Teoría Cuántica Relativista*, Física Teórica, Vol. 4, Parte I, Editorial Reverté S. A., p. 1, p. 14, p. 17, p. 19.

_______________________________ (2008): *Quantum Electrodynamics*, Course of Theoretical Physics, Second Edition, Vol. 4, Elsevier Butterworth-Heinemann.

Bohr, N. y Rosenfeld, L. (1983a): On the Question of the Measurability of Electromagnetic Field Quantities, *Quantum Theory and Measurement*, ed. by J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Princeton University Press, p. 479.

Bohr, N. y Rosenfeld, L. (1983b): Field and Charge Measurements in Quantum Electrodynamics, *Quantum Theory and Measurement*, ed. by J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Princeton University Press, p. 523: http://dieumsnh.qfb.umich.mx/archivoshistoricosmq/ModernaHist/Bohr%20rosenfeld.pdf

Bohr, N. (1987): *The Philosophical Writings of Niels Bohr*, Vol. I, Ox Bow Press, Woodbridge, Connecticut, p. 59.

Bokulich, P. y Bokulich, A. (2005): Niels Bohr's Generalization of Classical Mechanics, *Foundations of Physics*, 35, p. 347: http://people.bu.edu/pbokulic/papers/Boks-on-Bohr.pdf

d'Espagnat, B. (1995): *Veiled Reality: An Analysis of Present–Day Quantum Mechanical Concepts*, Addison – Wesley Publishing Company, p. 48.

Heisenberg, W. (1983): The Physical Content of Quantum Kinematics and Mechanics, *Quantum Theory and Measurement*, edited by J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Princeton University Press, p. 62.

Heitler, W. (1984): *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd edition, Dover Publications Inc., p. 26, p. 31, p. 76, p. 80, p. 123.

Howard, D. (1994): What Makes a Classical Concept Classical?, *Niels Bohr and Contemporary Philosophy*, ed. by J. Faye and H. Folse, Boston Studies in the Philosophy of Science, Kluwer, p. 201: http://www3.nd.edu/~dhoward1/Classcon.pdf

Jackson, J. D. (1975): *Classical Electrodynamics*, 2nd edition, John Wiley and Sons, p. 28, p. 169.
___________ (1998): *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley and Sons.

Krylov, N. y Fock, V. (1947): On the Uncertainty Relation between Time and Energy, *Journal of Physics* (U.S.S.R.) 11, p.112.

Landau, L. y Lifshitz, E. (1975): *Física Estadística*, Física Teórica, Vol. 5, Editorial Reverté S. A., p. 17, p. 35.
___________________ (2005): *Statistical Physics*, Course of Theoretical Physics, Third Edition, Part One, Vol. 5, Elsevier Butterworth-Heinemann.

Landau, L. y Lifshitz, E. (1983): *Mecánica Cuántica (Teoría No-Relativista)*, Física Teórica, Vol. 3, Editorial Reverté S. A., p. 26, p. 175.
____________________ (2005): *Quantum Mechanics Non-Relativistic Theory*, Course of Theoretical Physics, Third Edition, Vol. 3, Elsevier Butterworth-Heinemann.

Landau, L. y Peierls, R. (1983): Extension of the Uncertainty Principle to Relativistic Quantum Theory, *Quantum Theory and Measurement*, ed. by J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Princeton University Press, p. 465.

Mandelstamm, L. y Tamm, I. (1945): The Uncertainty Relation between Energy and Time in Non-Relativistic Quantum Mechanics, *Journal of Physics* (U.S.S.R.) 9, p. 249.

Mensky, M. (1993): *Continuous Quantum Measurements and Path Integrals*, IOP, Bristol, Philadelphia, p. 110.

Noyes, H. P. (1994): On the Measurability of Electromagnetic Fields: A New Approach, *SLAC-PUB-6445*, February 1994 (T/Noyes): http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-pub-6445.pdf

Pedraza, L. G. (2000): Is there a Flaw in the Seminal Bohr and Rosenfeld Paper on the Measurement Problem of the Free Quantum Electromagnetic Field?, *International Journal Physics Essays*, Vol. 13, No. 1, p. 132.

Pedraza, L. G. (2003): Feynman Restricted Integrals in the Measurement Limits of Electromagnetic and Gravitational Fields, *Revista Epiciclos*, Vol. 2, No. 1, p. 91.

Pedraza, L. G. (2004a): A Completion of the Bohr and Rosenfeld's Seminal Article on the Problem of Measuring the Free Quantum Electromagnetic Field, *Quantum Information and Quantum Control Conference*, Fields Institute and University of Toronto, July 19-23, 2004, Toronto, Canada: http://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/04-05/quantumIC/posters/index.html

Pedraza, L. G. (2004b): Quantum Control, Entanglement and Noise in the Seminal Bohr and Rosenfeld's Paper on Electromagnetic Field Measurements, *Seventh International Conference on Quantum Communication, Measurement and Computing*, University of Strathclyde and Tamagawa University, July 25-29, 2004, Glasgow, United Kingdom, *American Institute of Physics Conference Proceedings*, Vol. 734, p. 75.

Pedraza, L. G. (2006): A Formal Pseudo Realistic Measurement of Electromagnetic Field Uncertainty Relations, *Ninth International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations*, Centre National de la Recherche Scientifique, May 2-6, 2005, Besançon, France, *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 20, Nos. 11-13, p. 1428.

Pedraza, L. G. (2007): Geometric Factors in Electromagnetic Field Commutators and the Quantum Information Control of Vacuum Fluctuations, *XXXVIII International Symposium on Mathematical Physics*, Nicolaus Copernicus University, June 4-7, 2006, Toruń, Poland, *International Journal Open Systems and Information Dynamics*, Vol. 14, No. 3, p. 319.

Pedraza, L. G. (2008): A Formal Pseudo Realistic Measurement of the Charge-Current Uncertainty Relations and the Quantum Information Control of Vacuum Fluctuations, *The 5th Canadian Quantum Information Students' Conference*, University of Montreal, June 16-20, 2008, Montreal, Canada: http://www.iro.umontreal.ca/labs/theorique/cqisc08/talks/

Pedraza, L. G. (2011): Vacuum Fluctuations in Charge-Current Uncertainty Relations, *International Journal of Russian Laser Research*, Vol. 32, No. 5, p. 476.

Rodríguez, L. A. (2009): *Laboratorio Cero*, Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana de Cali, p. 12:

http://sharepoint.javerianacali.edu.co/fing/C_Naturales_M/a_fis/lb_fis/Cinemtica%20y%20Dinmica/Laboratorio%20cero%202009-2.pdf

Roldán, J., Ben-Dov, Y. y Guerrero, G. (2004): *La Complementariedad: Una Filosofía para el Siglo XXI*, Programa Editorial Universidad del Valle, pp. 133-152.

Roldán, J. (2007): Complementarity, Knowledge and Reality, *The Global Spiral*, a publication of Metanexus Institute: http://www.academia.edu/1925627/Complementarity_Knowledge_and_Reality

Talbot, T. R. (1978): Bohr and Rosenfeld Foundations for Quantum Electrodynamics, *Ph. D. Thesis*, Faculty of Philosophy, Columbia University, pp. 13 – 56.

Von-Borzeszkowski, H. y Mensky, M. (1994): Measurability of Electromagnetic Field: Model and Path Integral Method, *Phys. Letters A*, 188, p. 249: http://xxx.lanl.gov/pdf/quant-ph/0007092.pdf